مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي

أ.د / فارس عياد شاكر
أستاذ ورئيس قسم الاقتصاد
جامعة القاهرة

د./ عزت قناوي
دكتوراه الفلسفة في الاقتصاد
والعلوم السياسية

دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم
٢٠٠٦

تحـــذير

رقم الإيـداع بدار الكتب المصرية

الترقيم الدولي :

بسم الله الرحمن الرحيم

"وقل ربي زدني علماً"

صدق الله العظيم

مقدمـــــة

تعاني المكتبة العربية من قصور شديد من ناحيـــة الاهتمـــام البحثـــي وتوفير المراجع العلمية في فرعين أساسيين من فروع علم الاقتصاد ، وهمـــا الاقتصاد القياسي والرياضي ، لذلك كانت الحاجة ماسة إلى وجود كتاب يغطي هذا التخصص الذي يشكل جوهر قياس العلاقات الاقتصادية ويسد حيز الفراغ في المكتبة العربية وتحقيقاً لهذا الغرض فقد تم التعرض لبعض الموضـــوعات ذات الصلة والتي ينبغي معالجتها في إطار هذا التخصص . حيث تم الاعتمـــاد على النظرية الإحصائية كأحـــد الأدوات المســـتخدمة فـــي قيـــاس العلاقـــات الاقتصادية بجانب ضرورة المعرفة بمبـــادئ التحليـــل الاقتصـــادي ومبـــادئ الرياضيات في ضوء الاستعانة بنماذج تطبيقية من واقع النظرية الاقتصادية .

لذلك فإن هذا الكتاب يشتمل على قسمين رئيسيين : يضم القســـم الأول مبادئ الاقتصاد القياسي في حين يحتوي القسم الثاني علـــى أســـس الاقتصـــاد الرياضي .

وقد اعتمدنا في تناول الموضوعات المتعلقة بكل قسم على حده علـــى أسلوب تبسيط المعلومة وعدم الخوض في تفاصيل قد تزيد مـــن حـــدة تعقيـــد المشكلة وعرقلة فهمها بصورة جيدة .

وأرجو أن أكون قد وفقت في عرض هذه الموضوعات وأن يفي هـــذا الكتاب بالغرض المطلوب .

"واللـــه هو الموفـــق والمعــــيـــن"

د. عـــزت قنـــــاوي

القاهرة في يناير ٢٠٠٦

فهـــرس المحتويـــات

الموضــــــوعـــــــات	رقم الصفحة
القسم الأول : الاقتصاد القياسي	٦
الفصل الأول : ماهية وطبيعة الاقتصاد القياسي	٧
الفصل الثاني : العلاقات الاحصائية بين المتغيرات الاقتصادية	١٧
الفصل الثالث : استخدام نموذج الانحدار العام في قياس العلاقات الاقتصادية	٣٣
الفصل الرابع : التنبؤ من خلال تحليل الانحدار المتعدد	٦٠
الفصل الخامس : اختبار الفروض الاحصائية	٧٤
الفصل السادس : تقدير العلاقات الاقتصادية باستخدام النماذج المركبة	١٠٩
القسم الثاني : الاقتصاد الرياضـــي	١٢٤
الفصل الأول : التوازن الاقتصادي الجزئي	١٢٥
الفصل الثاني : تحليل التوازن الكلي	١٤٠
الفصل الثالث : المصفوفات	١٦٦
الفصل الرابع : المحـــددات	١٩٢
الفصل الخامس : اللوغاريتمات	٢١١
الفصل السادس : التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية	٢١٨
الفصل السابع : التكامل وتطبيقاته الاقتصادية	٢٥٣
المراجـــع :	٢٧١

القســـم الأولــــــــ

الاقتصــــاد القياســــــــــي

الفصـــل الأول

ماهية وطبيعة الاقتصاد القياســــــي

أولاً : مفهوم الاقتصاد القياســي

يعتبر الاقتصاد القياسي أحد فروع علم الاقتصاد حيث يرتكز اهتمامــه على تقدير العلاقات الاقتصادية من الناحية الكمية ، بجانب أنــه يهــتم بالتحليل الكمي للسلوك الاقتصادي ، وللوصول إلى ذلك فــإن الأمــر يتطلب استخدام أساليب مختلفة للتعبيــر عــن الظــواهر الاقتصــادية والعلاقات القائمة بين مختلف المتغيرات الاقتصادية فهنــاك الأســلوب الوصفي والكمي والبياني والرياضي ، ويعتمد الاقتصاد القياسي علــى استخدام الطرق الإحصائية والاستفادة من نتائجها في قياس العلاقــات الاقتصادية المختلفة . وقد أورد كل من ساملسون ، وستون ، وكــوب فونز تعريفاً واضحاً لعلم الاقتصاد القياسي بأنه التحليل الكمي لظــاهرة اقتصادية حقيقية مبنية على الملاحظات وتطور النظرية الاقتصادية .

ثانياً : وظائف الاقتصاد القياسي

تنحصر وظائف علم الاقتصاد القياسي فيما يلي :

- شرح التغير لظاهرة أو ظواهر اقتصادية ومعرفة سلوك المتغيرات المختلفة المؤثرة في حدوث هذا التغير .
- توفير التقدير الكمي للقيم التي تتعلق بالعلاقات التــي تــربط بــين المتغيرات الاقتصادية في صورة رقمية .

- توفير العناصر والأدوات والأساليب التي يتم على أساسها رفض أو قبول النظريات الاقتصادية .
- اختبار الفروض بين المتغيرات الاقتصادية .
- استخدام العلاقات التي يتم تقديرها في التنبؤ بالقيم الخاصة بالمتغيرات .
- تحديد أفضل الدوال الرياضية المعبرة عن العلاقات الاقتصادية بصورة واضحة .

ثالثاً : النماذج والمتغيرات

زاد انتشار النماذج في الآونة الأخيرة حيث حاول الاقتصاديين القياسيين تكوين نماذج للتوازن وذلك لتفهم العلاقة بين الإنتاج والاستهلاك والأسعار في اقتصاديات السوق ، كما اهتم أصحاب المنشآت الاقتصادية بتطبيق بعض النماذج الرياضية في حلول المشاكل الإدارية والإنتاجية وعمليات الشراء والتخزين . ويعتبر النموذج أحد المكونات الأساسية لمشاكل اتخاذ القرار فالنموذج هو عبارة عن ملخص للوضع الحقيقي يتم التعبير عنه في صورة معادلات رياضية تستخدم في دراسة وتحليل خواص النموذج وتحتوي على متغيرات يمكن قياس البعض منها في حين لا يمكن القياس أو التحكم في البعض الآخر منها .

وتشتمل النماذج على نوعان هما :

- **النموذج الساكن** ، حيث لا تحتوي المتغيرات فيه على عنصر الوقت بشكل واضح وصريح .

- **النموذج الحركي** ، وهو الذي يلعب فيه الوقت عنصرا هاما ودورا حيوياً ودرجة الاختلاف بين النموذجين تكمن في مدى البساطة أو التعقيد المتعلقة بمراحل توصيف المنهجية أو الإجراءات الخاصة بكل نموذج ومن الناحية النظرية نستطيع اختزال أي نموذج حركي إلى نموذج ساكن ، ولكن الأمر يختلف عند التطبيق العملي حيث يؤدي ذلك إلى تعقيدات خاصة بطبيعة المنهج مما يصعب من تحليل المشكلة محل البحث .

هذا ويمكننا القول بأن النماذج الساكنة تستخدم لعدة أغراض منها أنه قد يكون النموذج الساكن أفضل طريقة لوصف مشكلة ساكنة من خلال التعمق والإدراك لتفهم مكونات وأبعاد هذه المشكلة . كما أن هذا النموذج يعد من الركائز الأساسية التي يتم على أساسها بناء وشرح الظواهر الاقتصادية الرياضية .

أما فيما يتعلق بالمتغيرات فهي تعبر عن عناصر قيمتها متغيرة أي أن المتغير يأخذ قيماً مختلفة طبقاً لنقاط ملاحظته ، فالدخل القومي لدولة ما قد يكون ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، وحدة أو أي رقم آخر . ولهذا السبب (أي اتخاذ المتغير لعديد من القيم) عادة ما يتم استخدام مختلف الرموز للتعبير عن المتغيرات . وهناك العديد من المتغيرات الشائعة الاستخدام في الاقتصاد والرموز التي ارتبطت بها مثل الإنفاق الاستهلاك (ك) . والإنفاق الاستثماري (ث) ، الصادرات (ص) ، الواردات (م) ، الأسعار (س) وغيرها .

ويمكن تقسيم المتغيرات إلى ثلاثة أنواع هي :

أ- المتغيرات الداخليــة Endogenous Variables وهــي تلــك المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به .

ب- المتغيرات الخارجيــة Exogenous Variables وهــي تلــك المتغيرات التي تؤثر في النموذج ولا تتأثر به .

ج- المتغيرات المســتقلة Independent Variables وهــي تلــك المتغيرات التي لا تؤثر في النموذج ولا تتأثر به .

كما تختلف المتغيرات الداخلية والخارجية طبقاً للنموذج المراد دراسته فما يعتبر متغيراً داخلياً في نموذج ما قد يكون متغيــراً خارجيــاً فــي نموذج آخر .

رابعاً : العلاقات الدالية والمعادلات أو المتباينات

يمكن أن نستفاد من المتغيرات التي سبق ذكرها بصورة محدودة فــي حالة ارتباط بعضها البعض في علاقات مختلفة ، هذه العلاقــات بــين المتغيرات يمكن وصفها فيما يسمى بالعلاقات الدالية . فعندما نــدرس العلاقة بين الكمية المطلوبة (ك ط) من سلعة معينة وبين ســعر هــذه السلعة (س) فإننا نجد أن الكمية المطلوبة تتوقف على الســعر حيــث يمكن التعبير عن ذلك في صورة رياضية كالآتـــي :

ك ط = د (س)

ونلاحظ أن الكمية المطلوبة هي المتغير التابع حيث أن تغييرها يكــون نتيجة لتغيير السعر (المتغير المستقل) . كما نلاحــظ أن التغييــر فــي المتغير التابع قد يتوقف على عدد من المتغيرات المســتقلة بــدلاً مــن متغير واحد فتكون الدالة متعددة المتغيرات. وتعين النظرية الاقتصادية

أنواع العلاقات القائمة بين المتغيرات بدون أن تضعها في صورة محدودة فالنظرية توضح مثلاً اعتماد الكمية المطلوبة على السعر غير أنه قد تأخذ العلاقة الدالية صورة خطية أو غير خطية طبقاً لطبيعة معدلات التغيير التي تربط المتغيرات الواردة في هذه النظرية . غير أن هناك اعتبارات تتعلق بالطرق الإحصائية المستخدمة تدفع نحو استخدام علاقات خطية وأن تلك التي تفترض ثبات معدلات التغير . فإذا افترضنا أن العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وبين سعرها كانت علاقة خطية على النحو :

ك ط = أ – ب س

حيث تسمى الثوابت أ ، ب بمعالم المعادلة ، ويوضح المقدار (أ) قيمة المتغير التابع عندما يختص المتغير المستقل أي الصفر . أما المقدار (ب) فيوضح نسبة التغيير في المتغير المستقل إلى التغيير في المتغير التابع أو ما يسمى بميل الدالة وهو مقدار ثابت .

ويمكن تقسيم العلاقات الاقتصادية إلى :

أ- **العلاقات الاقتصادية السلوكية** : حيث يتم على أساسها بناء التصرفات الاقتصادية المختلفة لأنها تصف سلوك الوحدات الاقتصادية فيما يختص بالظواهر الاقتصادية فهي تصف سلوك الأفراد فيما يتعلق بالاستهلاك والدخل والأسعار حيث يمكن تمثيل هذه العلاقة في المعادلة التالية :

$$C = B_O + B_1 \text{ Log } Y + B_2 \text{ Log } P$$

حيث (C) تعبر عن الاستهلاك ، (Y) تعتبر عن الدخل ، (P) تعبر عن الأسعار ، أما (B_0, B_1, B_2) فهي معاملات هذه العلاقة . فالمعادلات الخاصة بوصف الطلب على سلعة ما والقول بأنه يتوقف على سعرها في علاقة خطية مثلاً يعتبر من قبيل المعادلات السلوكية ، والقول بأن الإنفاق الاستثماري يرتبط عكسياً بسعر الفائدة السائدة في السوق يعتبر من قبيل المعادلات السلوكية أيضاً .

ولا يقتصر هذا النوع من المعادلات على وصف سلوك الأفراد المتعلق بمختلف الظواهر الاقتصادية بل أنه يمتد ليصف النواحي الفنية مثل العلاقة بين الكمية المنتجة من سلعة ، وكمية عناصر الإنتاج المستخدمة (دالة الإنتاج) والتي يمكن التعبير عنها في الصورة التالية :

$$Q = \gamma k^{a} L^{1-a}$$

حيث (Q) تعبر عن الناتج ، (K) تعبر عن وسيلة الإنتاج ، (L) تعبر عن عنصر العمل وهذه العلاقة فنية حيث توضح كيفية تحقيق الناتج باستخدام عناصر الإنتاج أو فنون إنتاجية معينة .

أما فيما يتعلق بكل من (a ، Y) فهي تعبر عن قيم ثابتة .

ب- **العلاقات الجزئية والكلية :** العلاقة الجزئية هي تلك العلاقة التي تتعلق بالبنية الفردية أو بالوحدات الاقتصادية ، وهي تتناول السلوك الاقتصادي لهذه الوحدات كعلاقة العرض الخاص بمنشأة

اقتصادية معينة ، وعلاقة الطلب الفردي التي تربط بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة وأسعار هذه السلعة ، وغيرها من العلاقات التي تتعلق بنشاط اقتصادي جزئي ، وأما العلاقات الاقتصادية الكلية فهي تلك العلاقات التي تربط بين متغيرات اقتصادية ، تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد ، مثل علاقة الاستهلاك العام وعلاقة الادخار العام .

ج- **العلاقات التعريفية والقانونية** : ويطلق على هذا النوع من المعادلات اسم المتطابقات نظراً لضرورة تحقيق المساواة بين الطرفين دائماً . فهي علاقات تحدد قيمة المتغير التابع بتحديد تعريف له في صورة علاقة مساواة مثال ذلك :

الناتج القومي الصافي= الناتج القومي الإجمالي-استهلاك رأس المال

القيمة = الكمية × السعر

أما العلاقات القانونية فهى التي يتم تحديدها بناء على قوانين لها صفة الإلزام بحكم القانون مثل الضريبة التي يتم تحديدها بناء على نسبة معينة طبقاً لقانون الضرائب وهي ممكن أن تتغير وفقاً للتغيرات القانونية التي تطرأ على تعديل التشريعات .

د- **العلاقات التوازنية** : وهذه العلاقة تتحقق عند حدوث التوازن فقط ومن أمثلة ذلك شرط توازن السوق لسلعة معينة لا يتحقق إلا بناء على تساوي الكمية المطلوبة مع المعروضة من هذه السلعة أي أن ك ط = ك ع وكذلك الحال في الاقتصاد الكلي فإن من شروط تحقيق مستوى الدخل التوازني تساوي الطلب الكلي مع العرض الكلي .

ومن الجدير بالذكر أن هذه العلاقات الاقتصادية التي يتم تقديرها كمياً في شكل معادلات أو متباينات لابد وأن تتسم بالخصائص أو الصفات التالية :

١- **المطابقة** : حيث لابد وأن يكون للنموذج أو المعادلة الرياضية هدف معين .

٢- **السهولة** : أي أن تكون المعادلة الاقتصادية سهلة الفهم واضحة المعنى .

٣- **مطابقة البيانات الاقتصادية** : وهذه مسئولية الباحث من حيث الاهتمام بدراسة المشكلة الاقتصادية وتحديد ومعرفة البيانات الضرورية في حدوث التغير للظاهرة الاقتصادية والمتغيرات المرتبطة بها .

٤- **دقة المعاملات** : وتوضح الأهمية التي ينبغي على الباحث معرفتها في إطار فهم النظرية الاقتصادية وذلك لشرح وتفسير وتحليل المعاملات وفقاً لقواعد وأسس علمية معينة .

وفي حالة توافر هذه الخصائص فإن التقدير الكمي للعلاقات الاقتصادية سيكون صحيحاً ، فهناك نظريات معينة قد يبدو منطقها صحيحاً ولكنه غير ملائم بسبب الفروض الخاطئة ، وقد يكون هذا الخطأ من نوعين هما :

- قد يكون الفرض ببساطة منافياً للمشاهدة اليومية بمعنى أن تكون النظرية قد افترضت وجود منافسة كاملة في حين أننا نرى أن

المنافسة غير كاملة وقد يرجع ذلك إلى أن الحياة العملية الحقيقية معقدة لدرجة لا يمكن وصفها بالكامل .

- استحالة النقد القائم على التجريد أو الإبهام .

وخلاصة ما سبق أن النظرية لابد وأن تحتوي على ثلاثة عناصر هي :

أ- البيانات التي تشكل معالم المجتمع .

ب- المتغيرات ويجب تحديدها داخل إطار النظرية .

ج- افتراضات السلوك التي يتم على أساسها تحديد قيم المتغيرات .

خامساً : الفرق بين الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي

Econometrics and mathematical Economics

سبق وأن أشرنا إلى أن الاقتصاد القياسي يهتم بتقدير العلاقات الاقتصادية من الناحية الكمية حيث يعتمد على استخدام الطرق الإحصائية والاستفادة من نتائجها في قياس هذه العلاقات المختلفة . كما أنه يساعد على اختبار الفروض بين المتغيرات الاقتصادية وتوفير الأدوات والأساليب التي يتم على أساسها رفض أو قبول النظريات الاقتصادية ، كما يهتم بالعمل على استخدام العلاقات التي تم تقديرها في كيفية التنبؤ بالقيم الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية .

أما الاقتصاد الرياضي فهو يهتم بتوصيف النظرية الاقتصادية في صورة رياضية وذلك من خلال استخدام الرموز والطرق الرياضية لاشتقاق العلاقات الاقتصادية من الافتراضات الأساسية . وقيد يفيد استخدام الأساليب الرياضية في النظرية الاقتصادية في عرض التعاريف والفروض والنتائج للنظرية في صورة متناسقة وواضحة ،

بالإضافـــة لذلك فإنه يساعد على استخلاص النتائج في شكل قيم معينة وقد يمكن اللجوء إلى استخدام الاقتصاد الرياضي في دراسة النمـــاذج التي من الصعب دراستها بصورة وصـــفية أو بيانيـــة مثـــل النمـــاذج الديناميكية أو دراسة نظرية المنتج بأسلوب البرامج الخطية .

الفصـــل الثانـــــي

العلاقات الإحصائية بين المتغيرات الاقتصادية

من المشاكل الأساسية التي تواجه علم الاقتصاد القياســـي العمـــل علـــى تطوير طريقة فعاله لقياس مدى العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية . ومثال ذلك فلو كانت (Y) متغير اقتصادي ، (X) متغير اقتصادي آخر فإن العلاقة بينهما يمكن صياغتها على النحو التالي :

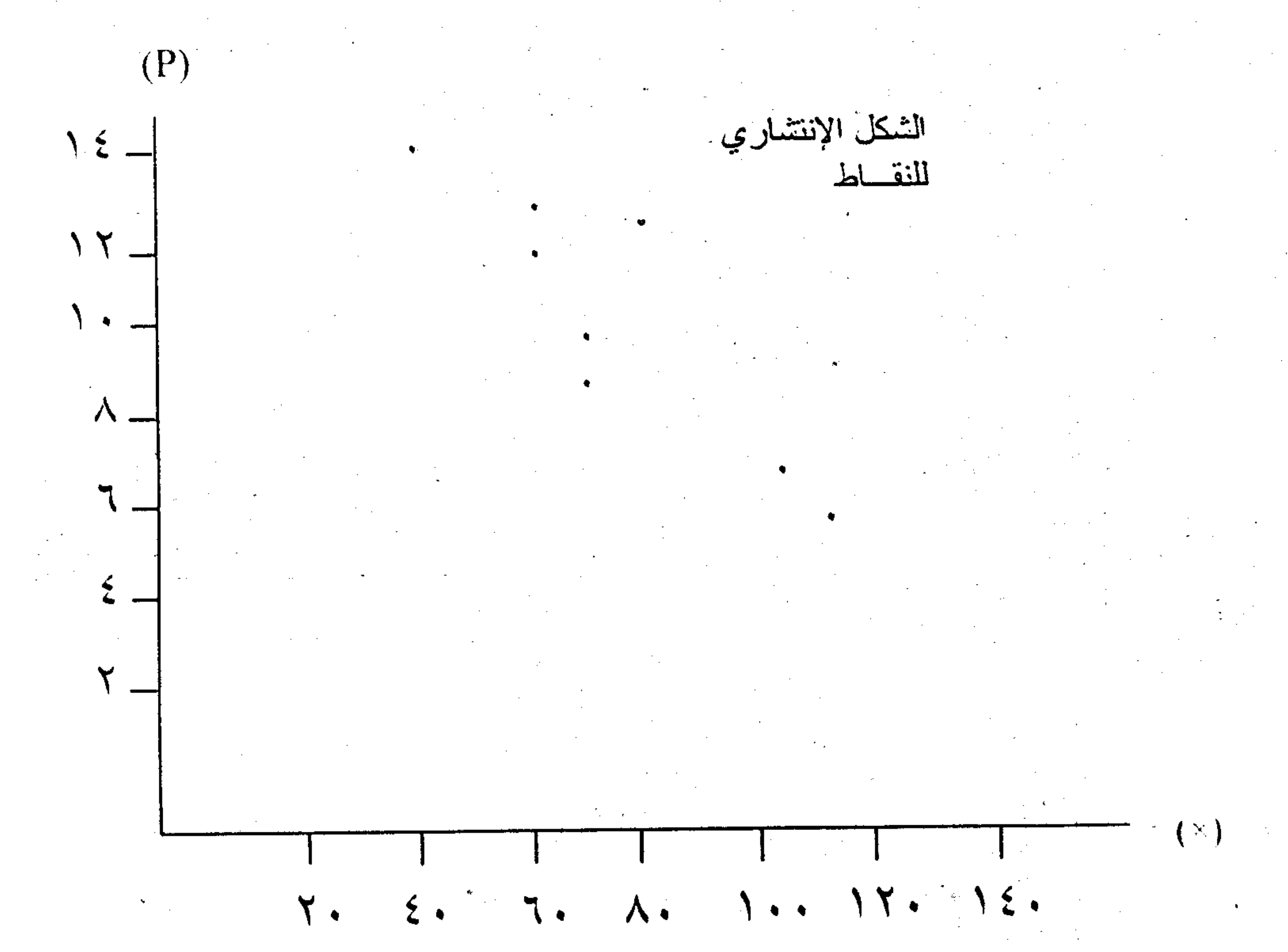
$$Y = a + b\,x$$

وتعتبر هذه العلاقة خطية بين المتغيرين (X) ، (Y) أما قيمة (a) ، (b) فهي ثابتة وتسمى بمكملات أو معاملات العلاقة .

أولا : توصيف العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

في هذه الحالة لا نفترض أي فرضيات تتعلق بالعلاقة السببية أي عـــدم تحديد أية متغيرات تابعة أو مستقلة ، ولكن البحث في مـــدى وجـــود تلازم بين هذه المتغيرات أم لا . ولتوضيح ذلك نسوق المثـــال التـــالي الذي يبين الكميات والأسعار خلال فترة زمنية معينة وبعد ذلك يمكـــن توضيح هذه البيانات في شكل انتشـــاري :

الفترة الزمنية	الكمية المشتراة من السلعة (×)	الأسعار (P)
١	١٠٠	١٠
٢	١٢٠	٩
٣	٩٠	١٢
٤	٩٥	١١
٥	١٤٠	٨
٦	١٧٥	٧
٧	٧٠	١٤



ويتضح من هذا الشكل أن هناك علاقة عكسية بين الاتجاه العام للأسعار والاتجاه العام للكميات فعندما تزيد الأسعار تنخفض الكميات المشتراة . ويمكن قياس هذه العلاقة من الناحية الإحصائية كمياً عن طريق مقياس التباين المشترك Covariance حيث يوضح التباين المشترك بين كل من (X) ، (P) طبيعة هذه العلاقة هل هي طردية أم عكسية .

ثانيا : التباين المشترك (Covariance)

هل العلاقة بين المتغيرين (y) و (X) هي علاقة طرية أم عكسية ؟

يمكن التوصل إلى معرفة ذلك باستخدام مقياس التباين المشترك ويعرف التباين المشترك رياضياً على النحو التالي :

$$\sigma_{xy} = E\left[(x - u_x)(y - U_y)\right]$$

حيث أن (σ_{xy}) تشير إلى قيمة التباين المشترك المقاسة بالنسبة للمتغيرين (y) و (x) .

وحيث أن $\mu_x = E(x)$ وهو عبارة عن القيمة المتوقعة للمتغير (x) .

$\mu_y = E(y)$ هو عبارة عن القيمة المتوقعة للمتغير (y) .

فإذا كانت قيمة (σ_{xy}) موجبه ، فإن ذلك يعني وجود علاقة طردية بين كل من (y) و (x) . ويعني ذلك أن القيم العليا للمتغير (x) تصاحبها قيم عليا بالنسبة للمتغير (y) وأن القيمة الدنيا للمتغير (X) تصاحبها قيم دنيا بالنسبة للمتغير (Y) .

أما إذا كانت قيمة (σ_{xy}) سالبة ، فإن ذلك يعني وجود علاقة عكسية بين كل من (y) و (x) . ويعني ذلك أن القيم العليا للمتغير (x)

تصاحبها قيم دنيا بالنسبة للمتغير (y) ، وأن القيم الدنيا للمغير (x) تصاحبها قيم عليا بالنسبة للمتغير (y) .

فعندما تكون قيمة (σ_{xy}) أكبر من الصفر ، فإن القيم التي هي أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (x) تصاحبها قيم أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) ، أي أن $(x - \mu_x)$ إذا كانت أكبر من الصفر ، فإن $(y - \mu y)$ تكون أكبر من الصفر . أما إذا كانت $(x - \mu_x)$ أقل من الصفر فإن $(y - \mu y)$ تكون أقل من الصفر بوجه عام .

وعندما تكون قيمة (σ_{xy}) أقل من الصفر ، فإن القيم التي هي أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (x) تصاحبها قيم أقل من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) ، أي أن $(x - \mu_x)$ عندما تكون أكبر من الصفر ، فإن $(y - \mu_y)$ تكون أقل من الصفر بوجه عام ، والعكس صحيح .

أما إذا كانت قيمة (σ_{xy}) مساوية للصفر فإن القيم الخاصة بالمتغير (x) ، والتي هي أكبر من المتوسط ، قد تصاحبها قيم أكبر من المتوسط بالنسبة للمتغير (y) وقد تصاحبها قيم أقل من المتوسط ، ويمكن أن يحدث ذلك في حالتين :

الحالة الأولى : هي الحالة التي يكون فيها المتغير (x) مستقلاً عن المتغير (y) ، أي في حالة عدم وجود علاقة بين هذين المتغيرين .

الحالة الثانية : هي الحالة التي توجد فيها علاقة بين المتغيرين ، ولكن هذه العلاقة غير خطية ، كأن تكون علاقة قطع مكافئ ، وذلك لا يمكننا أن نستنتج عدم وجود علاقة بين (x) و (y) إذا كانت قيمة (σ_{xy})

مساوية للصفر ، لأن العلاقة يمكن أن تكون موجودة ، ولكنها علاقة غير خطية .

استخدام تحليل التباين :

يفيد تحليل التباين في الجوانب التالية :

١- تقدير درجة الاعتماد على النتائج أو دقتها عند تقسيم ظاهرة ما إلى مجموعات نتيجة لتغير عنصر واحد في المتوسط .

٢- تقدير درجة معنوية النتائج في حالة دراسة أثر أكثر من متغير واحد على التغير في الظاهرة موضوع التحليل .

مستوى المعنوية : Significance Level

هو درجة الاحتمال الذي تقبل أو ترفض على أساسها النظرية الفرضية ، والمتبع في الدراسات الاقتصادية هو استعمال مستويين للمعنوية هما:

أ- مستوى المعنوية ٠.٠١ (١%) : يعني أن احتمال وقوع مشاهدة ما في المدى $(\mu + 3\sigma)$ هو ٩٩% واحتمال وقوع المشاهدة خارج هذه الحدود هو ٠.٠١ (١%) .

ب- مستوى المعنوية ٠.٠٥ (٥%) : تعني أن احتمال وقوع مشاهدة ما في المدى $(\mu + 2\sigma)$ هو ٩٥% واحتمال وقوعها خارج هذه الحدود هو ٥% . أو بمعنى آخر هناك ٩٥% من مائة نتيجة فرق حقيقي ، ٥ حالات فقط نتيجة للصدفة .

ثالثاً : معامل التوافق : Coefficient of Contingency

قد يرغب الباحث في إيجاد العلاقة أو الارتباط بين ظاهرتين وصفيتين أو متغير وصفي والآخر كمي . وهناك عدة مقاييس لقياس هذا النوع من الارتباط منها معامل الاقتران ومعامل التوافق وسنقتصر على أفضل هذا المقاييس وهو معامل التوافق ، ويمكن تعريفها كالآتي :

$$ق = \sqrt{\frac{ج - ١}{ج}}$$

حيث : ق = معامل التوافق

ج = مجموع مربعات كل خانة في الجدول مقسوماً على حاصل ضرب مجموع التكرارات للعمود الواقعة فيه هذه الخانة ومجموع التكرارات للصف الواقعة فيه هذه الخانة .

والفكرة لقياس الارتباط بين الظاهرتين تقضي بتقسيم هاتين الظاهرتين إلى أقسامها المختلفة وتوزيعها على هذه الأقسام كما هو الحال نحو إنشاء التوزيع التكراري المزدوج .

مثـــال :

احسب معامل التوافق للجدول التالي الذي يمثل أسعار ثلاثة أنواع من سلعة معينة طبقاً لأربعة مستويات للأسعار .

مستويات الأسعار	أنواع السلع			المجموع
	١	٢	٣	
أ	٦	٤	٣	١٣
ب	٢	٥	٤	١١
ج	٣	٦	٨	١٧
د	٢	صفر	٢	٤
المجموع	١٣	١٥	١٧	٤٥

الحل : مجموع مربعات الخانات مقسومة على حاصل ضرب مجموع العمود الواقعة فيه هذه الخانة ومجموع الصف الواقعة فيه هذه الخانة .

بالنسبة لمستوى الأسعار أ = $\frac{٣٦}{١٣ \times ١٣} + \frac{١٦}{١٣ \times ١٥} + \frac{٩}{١٣ \times ١٧}$

= ٣٣٥٨ر

بالنسبة لمستوى الأسعار ب = $\frac{٤}{١١ \times ١٣} + \frac{٢٥}{١١ \times ١٥} + \frac{١٦}{١١ \times ١٧}$

= ٢٦٠٣ر

بالنسبة لمستوى الأسعار ج = $\frac{٩}{١٧ \times ١٣} + \frac{٣٦}{١٧ \times ١٥} + \frac{٦٤}{١٧ \times ١٧}$

= ٤٠٣٤ر

بالنسبة لمستوى الأسعار د = $\frac{٤}{١٣ \times ٤} + \frac{\text{صفر}}{١٥ \times ٤} + \frac{٩}{١٧ \times ٤}$

= ١٣٥٧ر

إذاً ح = ٣٣٥٨ر + ٢٦٠٣ر + ٤٠٣٤ر + ١٣٥٧ر = ١٣٥٢ر١

ويكون معامل التوافق ق = $\sqrt{\frac{\text{ح} - ١}{\text{ح}}}$

= $\sqrt{\frac{١٣٥٢ر١ - ١}{١٣٥٢ر١}}$ = ٣٤٥ر

ويلاحظ أن معامل التوافق تنحصر قيمته دائماً بين الصفر والقيمة

$$\sqrt[٤]{\frac{(ق_١ - ١)\ (ق_٢ - ١)}{ق_١ \times ق_٢}}$$

حيث تمثل $ق_١$ عدد الأقسام بالنسبة لأحد المتغيرين ، $ق_٢$ عدد الأقسام للمتغير الآخر .

ونظراً لاختلاف جداول التوافيق بالنسبة لكل مشكلة فبالتـــالي يختلــف الحــد الأقصى لجداول التوافيق .

ولذلك يجب قسمة معامل التوافق ق على هذا الحد الأعلى لتنتج قيمة تعادل تقريباً معامل الارتباط .

وبالنسبة للمثال السابق الحد الأعلى لمعامل التوافق .

يســاوي $\sqrt[٤]{\frac{(٤ - ١)\ (٣ - ١)}{٤ \times ٣}}$

يســاوي $\sqrt[٤]{\frac{٣ \times ٢}{١٢}}$

$= \sqrt[٤]{٥ر}$

$=$ ٨٤٠٩ر

وبقسمة معامل التوافق ٣٤٥ر على الحذ الأعلى لمعامل التوافق نجد أن :

٣٤٥ر ÷ ٨٤٠٩ر = ٤١٠٣ر

وهـــي تعادل قيمة ر تقريباً .

رابعاً : معامل الارتباط Coefficient of Correlation

يختص تحليل الارتباط البسيط بتقدير معامل الارتباط البسيط (r) واختبار معنويته . ومعامل الارتباط هو مقياس وصفي يقيس درجة العلاقة الخطية بين متغيرين .

وحسابات معامل الارتباط الخطي البسيط تعتمد على كمية الاختلافات لأحد المتغيرين والتي يمكن وصفها بعلاقة خطية للمتغير الآخر . ولا تختلف النتيجة فيما إذا كان المتغير الأول دالة للمتغير الثاني أو العكس وبالتالي في حسابات معامل الارتباط ليس هناك حاجة لتحديد أي المتغيرين هو السبب Cause وأيهما النتيجة Consequence أو تحديد أيهما مستقل وأيهما تابع مثل الانحدار .

وتتراوح قيمة معامل الارتباط بين 1 - ,1 + $(-1 \leq r \leq +1)$ حيث تدل القيم 1 + ,1- على العلاقة الخطية تماماً . بينما $r = 0$ تعني أنه ليس هناك علاقة خطية بين المتغيرين . وأن ذلك لا يعني أنه لا توجد أي علاقة بينهما فقد تكون العلاقة غير خطية .

والقيمة الوسطية لمعامل الارتباط r تدل على الجزء من الاختلافات في أحد المتغيرين التي يمكن وصفها من العلاقة الخطية للمتغير الآخر ، فمثلاً $r = 0.8$ تعني $(r^2 = 0.64)$ أي أن 64% من الاختلافات في المتغير x_2 يمكن وصفها بالعلاقة الخطية للمتغير x_1 .

وإشارة معامل الارتباط تدل على اتجاه التغير في أحد المتغيرين بالنسبة للتغير في الثاني ، فقيمة r تكون سالبة عندما يرتبط التغير الموجب

لأحد العاملين بالتغير السالب للعامل الآخر ، بينما تكون r موجبة عندما يكون التغير في العاملين في نفس الاتجاه .

ويحسب معامل الارتباط من المعادلة :

$$R = \frac{\Sigma (x-\overline{X})(y-\overline{y}) / n-1}{\sqrt{\Sigma (x-\overline{x})^2 / n-1 . \Sigma (y-\overline{y})^2 \ / n-1}} = \frac{\text{cov}(x , y)}{\sqrt{\sigma x^2 . \sigma y^2}}$$

$$\text{Or} \quad r = \frac{\Sigma (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma (x-\overline{x})^2 . \Sigma (y-\overline{y})^2}} = \frac{SP}{\sqrt{SS_{x} . SS_{y}}}$$

لاحظ أنه ليس من الضروري استخدام الرموز x , y في الارتباط وأن استخدامها لا يعني أن أحدهما مستقل والآخر تابع .

ويستخدم معامل الارتباط الخطي البسيط في حالتين هما :

أ- يستخدم في قياس درجة العلاقة بين متغيرين معروف جيداً أيهما السبب وأيهما النتيجة والتي يمكن تعريفها بمعادلة خط الانحدار .

ب- يستخدم في قياس درجة العلاقة الخطية بين متغيرين ليس معروفاً بالتحديد أيهما السبب وأيهما النتيجة .

خامساً : اختبار معنوية معامل الارتبـــاط

سبق أن ذكرنا أن r هي تقدير لمعامل ارتباط المجتمع P عندما 0 = p فإذا كانت النظرية الفرضية $Ho : p = 0$ فإنه يمكن اختبارها عـن طريق :

١ – إختبار t :

$$t = \frac{r - 0}{S_r}$$

حيث S_r هو الانحراف القياسي لمعامل الارتباط وهـو جـذر تبـاين معامل الارتباط S^2_r

$$S_r = \sqrt{S_r^2} = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}$$

– نقارن t المسحوبة بقيمة t الجدولية لدرجة حرية $n - 2$

٢ – اختبار r :

حيث أنه من المعادلة السابقة

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$$

وبتربيع طرفي المعادلة نصل إلى :

$$r^2 = \frac{t^2 (1 - r^2)}{n - 2}$$

من هذه المعادلة نجد أن هناك علاقة عكسية بين قيمة معامل الارتبــاط وعدد المشاهدات المحسوبة منها وقد استخدمت هذه العلاقة لحساب قيم نظريــة لمعامل الارتباط ووضعت في جداول على مستويات معنوية .05 , .01 لعدد من درجات الحرية .
وتستخدم هذه الجداول لمقارنة r المحسوبة بقيمة r الجدولية لدرجة حرية n- 2.

معامل التحــديــد : Coefficient of Determination

يعبر معامل التحديد عن النســبة بــين التغيــر المفســر (المشــروح) Explained Var إلى التغير الكلي .Total Var ويرمز له بــالرمز (r^2) أي مربع معامل الارتباط ويقدر من المعادلات التالية :

$$R2 = \frac{\text{Explained Var.}}{\text{Total Var.}} = \frac{\sum (\hat{y}-\bar{y})^2}{\sum (y-\bar{y})^2}$$

$$= \frac{B^2. \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}} = 1 - \frac{\sum (y-\hat{y})^2}{\sum (y-\bar{y})^2}$$

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد الصحيح ، أي أن :

$$O \leq r^2 \leq 1$$

ومن ذلك نستنتج أن :

١- معامل التحديد يكون مساوياً للواحد الصحيح ($r^2 = 1$) في حالة ما إذا كان التغير غير المفسر مساوياً للصفر ، بمعنى أن التغير الكلي سوف يكون مساوياً للتغير المفسر . وهذا يعني أن جميع نقط الشكل الانتشاري تقع تماماً على الخط المستقيم .

٢- معامل التحديد يكون مساوياً للصفر ، وهذا يعني أن خط الانحدار سوف يكون أفقياً ومارا بالمتوسط الحسابي ($\bar{y}$) ، بمعنى أن التغيز الكلي يكون جميعه غير مفسر ، وهذا هو الحد الأدنى لمعامل التحديد .

العلاقة بين الارتباط والانحدار :

$$B = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2} = \frac{\sum xy}{\sum X^2} \qquad (1)$$

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 . (y-\bar{y})^2}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum X^2 . \sum y^2}} \qquad (2)$$

When (1) is divided by (2) :

$$\frac{B}{r} = \frac{\sum xy}{\sum X^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2} . \sqrt{\sum y^2}}{\sum xy}$$

$$\frac{B}{r} = \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sqrt{\sum x^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x y^2}}$$

$$\frac{B}{r} = \frac{\sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x^2}}$$

وبقسمة البسط والمقام تحت الجذر التربيعي على (n-1) :

$$\frac{B}{R} = \frac{\sqrt{\sum y^2 / n-1}}{\sqrt{\sum x^2 / n-1}}$$

مثال :

أحسب معامل الارتباط ومعامل التحديد بين المتغيرين (x,y) التاليين :

X	3	5	7	9	11
Y	30	25	20	15	10

الحـــــل

X	Y	Xy	X^2	Y^2
3	30	90	9	900
5	25	125	25	625
7	20	140	49	400
9	15	135	81	225
11	10	110	121	100
$\sum x=35$	$\sum Y$ 100	$\sum Xy= 600$	$\sum X^2= 285$	$\sum Y^2 = 2250$

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x . \sum y}{n}}{\sqrt{\left[\sum X^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right]}}$$

$$= \frac{600 = \frac{35 \times 100}{5}}{\left[285 - \frac{(35)^2}{5}\right]\left[2250 - \frac{(100)^2}{5}\right]}$$

$$r = \frac{-100}{\sqrt{40 \times 250}} = \frac{-100}{100} = -1$$

ويشير هذا المعامل إلى أن هناك ارتباط عكسي تام بين المتغيرين .

$$R2 = (-1)^2 = 1$$

ويشير معامل التحديد (r^2) إلى أن التغير المستقل (x) يفسر ١٠٠% من التغير الحادث في العامل التابع (y) ، بمعنى أن التغير غير المفسر (الخطـأ) يكـون مساوياً للصفر .

الفصل الثالث

استخدام نموذج الانحدار العام في قياس العلاقات الاقتصادية

يهتم الانحدار الخطي البسيط بتقدير ثوابت العلاقة بين متغيرين (x) ، (y) واختبار معنويتها ، حيث يمثل أحدهما المتغير التابع والآخر المتغير المستقل . فعند دراسة العلاقة بين الدخل والاستهلاك فإن الدخل يمثل متغير مستقل والاستهلاك يمثل متغير تابع .

ويمكن التعبير عن العلاقة الدالية بين المتغيرين بالمعادلة الرياضية في الصورة التالية :

$$Y = F(x)$$

أي أن الدخل (Y) يعتبر دالة للاستهلاك (X) .

والغرض من تحليل الانحدار الخطي البسيط هو التوصل إلى معادلة رياضية خطية يمكن من خلالها تحديد الخط البياني الذي يصف العلاقة المتوسطة بين المتغيرين أو تقدير معادلة انحدار (y) على (x) .

وفيما يلي بعض الصور الرياضية التي تستخدم لتحليل معادلة الاتجاه العام .

(أ) **الإتجاه العام الخطي :** يمكن اختيار الصورة الرياضية المناسبة لسلوك الظاهرة موضوع الدراسة وذلك من خلال التوقيع البياني لقيم الظاهرة ودراسة شكل الانتشار . فعندما تتركز قيم الظاهرة حول خط مستقيم فإن معادلة الخط

المستقيم تكون هي أفضل الصور لتمثيل تلك الظاهرة ، أما إذا كانت هذه النقط تنتشر حول خط منحنى ، فإن صيغة المنحنى تكون أكثر مناسبة لتمثيل قيم تلك الظاهرة .

هذا ويمكن التعبير عن معادلة الخط المستقيم رياضياً في الصورة التالية:

$$\hat{Y}i = \hat{a} + \hat{B} \times i$$

حيث :

$\hat{Y}_i$ = القيمة التقديرية للمتغير التابع في الفترة الزمنية (i) .

$\hat{X}_i$ = متغير الزمن ، $I = 1,2, \ldots\ldots\ldots n$

$\hat{a}$ = الجزء المقطوع من المحور (y) عندما تكون : $X = O$

$\hat{B}$ = معدل تغير الظاهرة في المتوسط بالنسبة للزمن (ميل الخط المستقيم)

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى Least Squares يمكن تقدير قيم ثوابت المعادلة من خلال المعادلتين التاليتين :

$$\hat{B} = \frac{n \,\Sigma\, XY - \Sigma X \,.\, \Sigma Y}{n \,\Sigma\, X^2 - (\Sigma x)^2} \quad (1)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{B}\,\bar{X} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

حيث :

متوسط قيم الظاهرة (y) = $\bar{Y} = \frac{\Sigma y}{n}$

متوسط قيم المتغير المستقل (X) = $\overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$

وبعد تقدير قيم ثوابت معادلة الاتجاه العام يتعين اختبار معنوية النمـــوذج وذلك بتطبيق F – Test على النحو المبين بالجدول التالي :

جدول تحليل التبايـــــــن

مصدر التباين S.v	مجموع مربعات الإنحرافات S S	درجات الحرية d f	متوسط مربعات الانحرافات MS	معامل ف F – ratio
Regression الإنحـــــدار	$\Sigma (\hat{Y} - \overline{Y})^2 =$ $\hat{B}^2 \Sigma (X - \overline{X})^2 =$ $\hat{B}^2 \left[\Sigma X2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}\right]$	1	$MS_R = \frac{SSR}{1}$	$\frac{MS_R}{S^2}$
Residual البـاقـــــي	$\Sigma (y - \hat{Y})^2$ أو بالطرح	n - 2	$S^2 \frac{\Sigma (y - \hat{y})2}{n - 2}$	
Total الإجمالــــي	$\Sigma (Y - \overline{Y})^2 =$ $\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}$	n - 1		

للتعرف على معنوية النموذج نقارن معامل ف (F-ratio) المقدر من الجدول السابق بنظيره المتحصل عليه من جدول (F) الذي يحتوي على قيم حرجة عند درجات حرية مختلفة وعند مستويي معنوي ٠٥ر ، ٠١ر . وفي حالتنا هذه نستخرج القيمة الجدولية لمعامل (F) عند مستوى المعنوية المطلوب وعند درجات حرية : $df = (1, n-2)$.

ويتم تطبيق الاختبار كالآتي :

(١) إذا كانت قيمة (F) المقدرة ≥ القيمة الحرجة الجدولية فإنه لا يمكن رفض الفرض الصفرى (Ho) الذي مؤداه أن :

$$\hat{B} = O$$

(٢) إذا كانت قيمة (F) المقدرة > القيمة الحرجة فإننا نرفض الفرض الصفرى ونقبل الفرض البديل (Ha) الذي مؤداه أن :

$$\hat{B} \neq o$$

- يلي ذلك تطبيق اختبار ت T – Lest وذلك وفقاً للمعادلة التالية :

$$t = \frac{\hat{B}}{S/\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}} = \frac{\hat{B}}{S/\sqrt{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}}$$

$$t = \frac{\hat{B}}{S_{\hat{B}}}$$

حيث :

t = قيمة معامل اختبار T المراد تقديره .

$\hat{B}$ = قيمة معامل انحدار (ميل خط الإتجاه العام) المراد اختبار معنويته.

$S_{\hat{B}}$ = الخطأ المعياري لمعامل الانحدار .

ولإجراء الاختبار نستخرج قيمة t الجدولية عند مستوى المعنوية المطلوب وعند درجات حرية (n-2) وهي درجة حرية الخطأ (الباقي) ، ثم نقارنها بقيمة t المقدرة من المعادلة السابقة ، ونستنتج الآتي :

(١) إذا كانت t المحسوبة > الجدولية ، نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل ، أي أن قيمة $(\hat{B})$ معنوية عند هذا المستوى .

(٢) إذا كانت t المحسوبة ≥ الجدولية فلا يمكن رفض الفرض الصفري مما يعني أن قيمة $(\hat{B})$ غير معنوية عند هذا المستوى من مستويي المعنوية .

مثال (١) :

الجدول التالي يبين تطور كمية الإنتاج من القطن المصري خلال الفترة (١٩٨٠ – ١٩٩٥) .

السنة	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الكمية	١٥٠	٢٠٠	٢٠٥	٢٠٢	٢١٠	٢١٥	٢١٨	٢٢٠

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
الكمية	٢٢٠	٢٢٣	٢٢٥	٢٢٤	٢٤٠	٢٥٠	٢٦٠	٢٨٥

والمطلوب : تقدير معادلة الإتجاه الزمني العام في الصورة الخطية لمتغير ، الكمية المنتجة من القطن والتنبؤ بالكمية المتوقعة حتى عام ٢٠١٠ .

الحـــــل

Year	X	Y	Xy	X^2	Y^2
1990	1	150	150	1	22500
1991	2	200	400	4	40000
1992	3	205	615	9	42025
1993	4	202	808	16	40804
1994	5	210	1050	25	44100
1995	6	215	1290	36	46225
1996	7	218	1526	49	47524
1997	8	220	1760	64	48400
1998	9	220	1980	81	48400
1999	10	223	2230	100	49729
2000	11	225	2475	121	50625
2001	12	224	2688	144	50176
2002	13	240	3120	169	57600
2003	14	250	3500	196	62500
2004	15	260	3900	225	67600
2005	16	285	4560	256	81225
Total	136	3547	32052	1496	799433

$$\hat{B} = \frac{n\ \Sigma\ xy - \Sigma\ x\ .\ \Sigma\ y}{n\ \Sigma x^2 - (\Sigma\ x)^2}$$

$$= \frac{(16 \times 32052) - (136 \times 3547)}{(16 \times 1496) - (136)^2}$$

$$= \frac{512832 - 482392}{23936 - 18496} = \frac{30440}{5440} = 5.596$$

$$\boxed{\hat{B} = 5.596}$$

$$\hat{a} = \frac{\Sigma Y}{n} - \hat{B} \cdot \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{3547}{16} - \left((5.596) \left(\frac{136}{16} \right) \right)$$

$$= 221.688 - 47.566 = 174.122$$

$$\boxed{\hat{a} = 174.122}$$

وعلى ذلك يمكن وضع معادلة الخط المستقيم في الصورة الرياضية التالية :

$$\boxed{\hat{Y} = 174.122 + 5.596\,x}$$

ويلي تقدير ثوابت المعادلة اختبار معنوية النموذج ثم معنوية معامـــل الانحدار وذلك على النحـــو :

- اختبار تحليل التباين (F-test)

(*) المجموع الكلي لمربعات الانحرافات :

$$\text{Total SS} = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}$$

$$= 799433 - \frac{(3547)^2}{16} = \boxed{13107.438}$$

(*) مجموع مربعات الانحدار (التباين المشروع) :

$$\text{Regression SS} = \hat{B}^2 \left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n} \right]$$

$$= (5.596)^2 \left(1496 - \frac{(136)^2}{16} \right)$$

$$= (5.596)^2 \quad (340) = \boxed{10647.173}$$

(*) الباقي أو الخطأ (التباين غير المشروح) :

$$\text{Residual SS} = 13107.438 - 10647.173 = \boxed{2460.265}$$

ثم نقوم بتصميم جدول تحليل التباين على النحو التالي :

S.V	S S	d f	M S	F-ratio
Regression	10647.173	1	10647.173	
				60.587
Residual	2460.265	14	175.733	
Total	13107.438	15		

وحيث أن :

$$F\text{-ratio}\,(1,14)_{(0.01)} = 8.86$$

$$60.587 > 8.86$$

إذاً نرفض الفرض الصفري ، أي أن النموذج معنوي على مستوى معنوية ٠١ر.

- اختبار معنوية معامل الانحدار ($\hat{B}$) بتطبيق (T - test)

يتم تطبيق معادلة حساب قيمة (t) التالية :

$$t = \frac{\hat{B}}{S/\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}}$$

ويمكن الحصول على قيمة (S) من جدول تحليل التباين السابق ، وذلك بإيجاد الجذر التربيعي لتباين الخطأ ، أي أن :

$$S = \sqrt{S^2}$$

$$= \sqrt{175.733} = \boxed{13.256}$$

$$t = \frac{5.596}{13.256 / \sqrt{1496 - \frac{(136)^2}{16}}}$$

$$= \frac{5.596}{13.256/18.439} = \frac{5.596}{0.719} = \boxed{7.783}$$

حيث أن :

$$t_{.01\,(14)} = 2.977$$

بما أن قيمة (t) المسحوبة > الجدولية

إذاً نرفض الفرض الصفري ، أي أن قيمة $(\hat{B})$ معنوية على مستوى ٠١ر

ومما هو جدير بالذكر هنا أنه في حالة الانحدار الخطي البسيط ، يمكن اختبار الفرض الصفري $\left(Ho : \hat{B} = o \right)$ مقابل الفرض البديل $\left(Ha : \hat{B} \neq 0 \right)$ بطريقتين مختلفتين ، حيث أن هناك علاقة بين قيمة (t) ومعامل (F) يمكن صياغتها على النحو التالي :

$$t^2\,(\upsilon) = F\,(1, \upsilon)$$

وهذا يعني أن مربع المتغير العشوائي (t) بدرجة حرية (υ) تتبع نفس توزيع المتغير العشوائي (F) بدرجتي حرية $(1, \upsilon)$.

ولما كانت قيمة $(\hat{B})$ معنوية إحصائياً ، فإنه يمكن القول أن كمية الإنتاج من القطن قد اتخذت اتجاهاً عاماً متزايداً بمعدل سنوي معنوي إحصائياً بلغ حوالي

٦ آلاف طن في المتوسط خلال الفترة موضوع التحليل . وعلى ذلك يمكن الاعتماد على تلك المعادلة في التنبؤ بكمية الإنتاج من القطن ، حتى عام ٢٠١٠ ، وذلك على التوالي :

Year	X	$\hat{Y}$= 174.122+5..596x	Year	x	$\hat{Y}$ = 174.122 +5.596x
1990	1	179.718	2001	12	241.274
1991	2	185.314	2002	13	246.870
1992	3	190.910	2003	14	252.466
1993	4	196.506	2004	15	.258.062
1994	5	202.102	2005	16	263.658
1995	6	207.698	2006	17	269.254
1996	7	213.294	2007	18	274.850
1997	8	218.986	2008	19	280.446
1998	9	224.486	2009	20	286.042
1999	10	230.082	2010	21	291.638
2000	11	235.678			

يوضح الجدول السابق القيم التقديرية لكميات الإنتاج حتى عام ٢٠١٠ ، ومنه يتبين أنه من المتوقع أن يصل الإنتاج إلى ٢٩٢ ألف طن في عام ٢٠١٠ وذلك مع افتراض ثبات الظروف السائدة في فترة الدراسة حتى ذلك العام .

حساب معادلة الاتجاه العام الخطي بالطريقة المختصرة :

يطلق على الطريقة السابقة في المربعات الصغرى الطريقة المطولة ، غير أنه يمكن إتباع طريقة مختصرة تعتمد على جعل نقطة الأصل في منتصف السلسلة الزمنية بالضبط ، وعلى ذلك يكون :

$$\Sigma X = 0$$

ووفقاً لهذا الافتراض يمكن إيجاد قيم ثوابت المعادلة الخطية على النحو التالي :

$$\hat{B} = \frac{n\ \Sigma x y - \Sigma x . \Sigma y}{n\ \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

وحيث أن = $\Sigma x = 0$

$$\hat{B} = \frac{\sum x y}{\sum x^2}$$

$$\hat{a} = \frac{\Sigma y}{n} - B \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\hat{a} = \frac{\Sigma y}{n}$$

مثال (٢) :

الجدول التالي يبين قيمة الأرباح السنوية لإحدى الشركات بالألف جنيه خلال الفترة (١٩٨٩ – ١٩٩٧) .

Year	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Profit	57	48	64	78	73	80	90	88	97

والمطلوب :

(١) حساب معادلة الاتجاه الزمني العام في الصورة الخطية .

(٢) اختبار معنوية النموذج ومعنوية معامل الانحدار

(٣) التنبؤ بقيمة الأرباح المتوقعة عام ٢٠١٠

(٤) التوقيع البياني للقيم الفعلية والتقديرية للأرباح .

Year	X	Y	Xy	X^2	Y^2
1994	-4	57	- 228	16	3249
1995	-3	48	- 144	9	2304
1996	-2	64	- 128	4	4096
1997	-1	78	- 78	1	6084
1998	0	73	0	0	5329
1999	1	80	80	1	6400
2000	2	90	180	4	8100
2001	3	88	264	9	7744
2002	4	97	388	16	9409
Total	0	675	334	60	52715

$$\hat{a} = \frac{675}{9} = \boxed{75}$$

$$\hat{B} = \frac{\Sigma X Y}{\Sigma X^2} = \frac{334}{60} = \boxed{5.57}$$

وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة على النحو التالي :

$$\boxed{\hat{Y} = 75 + 5.57 X}$$

وذلك على أساس أن سنة الأساس (نقطة الأصل) هي عام ١٩٩٨.

وحتى يمكن الاعتماد على تلك المعادلة في التنبؤ يجب إجراء اختبارات المعنوية .

أولاً : إجراء اختبار ف F-test وذلك على النحو التالي :

S.V.	S.S	d f	M.S	F-ratio
Regression	$\hat{B} \cdot \Sigma x.^2$	1	$Ms_r = \frac{SS_R}{1}$	$\frac{MSr}{S^2}$
Residual	$\Sigma (Y - \hat{Y})^2$ أو بالطرح	n - 2	$S^2 = \frac{\Sigma(Y-\hat{Y})^2}{n-2}$	
Total	$\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}$	n - 1		

ويوضح الجدول التالي نتائج تطبيق F-test

S.v.	SS	d f	M.S	F-ratio
Regression	1861.494	1	1861-494	57.024
Residual	228.506	7	32.644	
Tota	2090.000	8		

$F_{.01}$ (1,7) = 12.25

وحيث أن قيمة معامل ف المقدرة أكبر من القيمة الجدولية .

إذا النموذج معنوي على مستوى ۰۱ر .

ثانياً : إجراء اختبار (t) لمعامل الانحـــــدار :

$$t = \frac{\hat{B}}{S / \sqrt{\Sigma X^2}}$$

$$t = \frac{5.57}{5.713/\sqrt{60}}$$

$$= \frac{5.57}{5.713/ 7.746}$$

$$= \frac{5.57}{0.738} = \boxed{7.547}$$

وحيث أن القيمة الجدولية عند مستوى معنوية ١٠ر هي :

$$t_{.01}\ (7) = 3.499$$

وهي أقل من قيمة t المحسوبة ، الأمر الذي يعني أن قيمة $(\hat{B})$ معنوية عند مستوى ١٠ر.

وعلى ذلك فإن معادلة الاتجاه الزمني العام لقيم الأرباح السنوية يمكن الاعتماد عليها في التنبؤ .

- التنبؤ بقيمة الأرباح المتوقعة عام ٢٠١٠ :

حيث أن نقطة الأصل (سنة الأساس) هي عام ١٩٩٨ فإننا نعوض عن قيمة × بالمقدار .

$$X = 2010 - 1998 = \boxed{12}$$

$$\hat{Y} = 75 + 5.57\ x$$

$$= 75 + (5.57)\ (12)$$

$$= \boxed{141.84}$$

أي أن قيمة الربح المتوقع عام ٢٠١٠ قد قدر بحوالي ١٤١,٨٤ ألف جنيه .

– ويتطلب التوقيع البياني حساب القيم التقديرية للأرباح بمعلومية قيم (X) .

Year	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
X	- 4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\hat{Y}$	52.72	58.29	63.86	72.73	75	80.57	86.14	91.71	97.28

تقدير معادلة الاتجاه الزمني العام غير الخطي (الدرجة الثانية) :

تأخذ معادلة الاتجاه من الدرجة الثانية الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{B}_1\ x + \hat{B}_2\ x^2$$

حيث :

$\hat{Y}$ = القيمة التقديرية للظاهرة موضوع الدراسة .

$\hat{a}$ = الجزء المقطوع من المحور (Y) عندما تكون :

$$X = 0$$

B_1, B_2 = يعبران عن معاملي انحدار منحنى الدالة .

ولإيجاد قيمة ثوابت المعادلة السابقة يتعين تقدير معاملاتها في المعاملات الطبيعية التالية :

$$\Sigma Y = n\hat{a} + \hat{B}_1 \Sigma x + \hat{B}_2 \Sigma x^2$$

$$\Sigma Xy = \hat{a} \Sigma x + \hat{B}_1 \Sigma x^2 + \hat{B}_2 \Sigma x^3$$

$$\Sigma X^2y = \hat{a} \Sigma x^2 + \hat{B}_1 \Sigma x^3 + \hat{B}_2 \Sigma x^4$$

ومن هذه المعادلات الطبيعية يمكن إيجاد قيمة ثوابت معادلة الدرجة الثانية من خلال حل المعادلات أو المحددات أو المصفوفات ، ولعل أبسط هذه الطرق هو استخدام محدد كرامر وذلك على النحو التالي :

- إيجاد المحدد الأساسي . وهو يشتمل على معاملات المجاهيل في المعادلات الثلاث وذلك على النحو التالي :

$$|A| = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{vmatrix}$$

- إيجاد محددات المجاهيل الثلاثة وذلك كما يلي :

$$|\hat{a}| = \begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma xy & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma X^2Y & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{vmatrix}$$

حيث تم إحلال عمود الحدود المطلقة محل العمود الأول في المحدد الأساسي .

$$\left|\hat{B}_1\right| = \begin{vmatrix} n & \Sigma y & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma xy & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^2 y & \Sigma x^4 \end{vmatrix}$$

$$\left|\hat{B}_2\right| = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^2 y \end{vmatrix}$$

$$\hat{a} = \frac{\left|\hat{a}\right|}{\left|A\right|}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\left|\hat{B}_1\right|}{\left|A\right|}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{\left|B_2\right|}{\left|A\right|}$$

مثال (٣) : الجدول التالي يبين تطور قيمة الاستثمارات بالمليون جنيه على مستوى أحد المناطق السياحية خلال الفترة (١٩٩٦ – ٢٠٠٤) :

Year	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Y	68	50	81	105	100	101	98	86	103

والمطلوب : تقدير معادلة الاتجاه العام للاستثمارات وذلك بتوفيق معادلة من الدرجة الثانية – اختبار معنوية النموذج ومعنوية ثوابتها – في حالة ثبوت المعنوية تنبأ بقيمة الاستثمارات المتوقعة عام ٢٠١٠ مع افتراض ثبات الظروف الحالية على ما هي عليه حتى ذلك العام .

الحل

لقد أمكن التوصل إلى المعادلات الطبيعية الثلاث الممثلة لمعادلة الدرجة الثانية ، والتي أمكن الاعتماد عليها في إيجاد قيمة الثوابت وهي :

$$Y = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \Sigma x + \hat{B}_2 \Sigma x^2$$

$$\Sigma X y = \hat{B}_0 \Sigma x + \hat{B}_1 \Sigma x^2 + \hat{B}_2 \Sigma x^3$$

$$\Sigma X^2 y = \hat{B}_0 \Sigma x^2 + \hat{B}_1 \Sigma x^3 + \hat{B}_2 \Sigma x^4$$

ويمكن تطبيق الطريقة المختزلة والتي تعتمد على جعل :

$$\Sigma X = O$$

في اختصار العمليات الحسابية وذلك على النحو التالي :

$$\Sigma y = n\ \hat{B}_0 + \hat{B}_2\ \Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = \hat{B}_1\ \Sigma x^2$$

$$\Sigma x^2 y = \hat{B}_0 \Sigma x^2 + \hat{B}_2\ \Sigma x^4$$

وعلى ذلك يلزم إجراء العمليات الحسابية على النحو المبين بالجدول التالي :

Year	y	x	xy	X^2	X^2y	X^3	X^4	Y^2	$\hat{y}$
1996	68	- 4	-272	16	1088	-64	256	6424	57.44
1997	50	- 3	-150	9	450	027	81	2500	71.10
1998	81	- 2	-162	4	324	-8	16	6561	82.18
1999	105	- 1	-105	1	105	-1	1	11025	90.68
2000	100	0	0	0	0	0	0	1000	96.60
2001	101	1	101	1	101	1	1	10201	99.94
2002	98	2	196	4	392	8	16	9604	100.70
2003	86	3	258	9	774	27	81	7396	98.88
2004	103	4	412	16	1648	64	256	10609	94.48
Total	**792**	**0**	**278**	**60**	**4882**	**0**	**708**	**72520**	

بالتعويض في المعالات المختزلة :

$$792 = 9\ \hat{B}_0 + 60\ \hat{B}_2 \qquad (1)$$

$$278 = 60\ \hat{B} \qquad (2)$$

$$4882 = 60\ \hat{B}_0 + 708\ \hat{B}_2 \qquad (3)$$

من المعادلة (2) :

$$\hat{B}_1 = \frac{278}{60} = \boxed{4.63}$$

من المعادلة (١) :

$$792 = 9\hat{B}_0 + 60\ \hat{B}_2$$

بقسمة طرفي المعادلة على (3) :

$$264 = 3\hat{B}_0 + 20\hat{B}_2$$

$$3\hat{B}_0 = 264 - 20\ \hat{B}_2$$

$$\hat{B}_0 = 88 - \frac{20}{3}\ \hat{B}_2$$

بالتعويض عن قمة $(\hat{B}_0)$ في المعادلة (3) ينتج أن :

$$4882 = 60\left(88 - \frac{20}{3}\ \hat{B}_2\right) + 708\ \hat{B}^2$$

$$4882 = 5280 - 400\ \hat{B}_2 + 708\ \hat{B}_2$$

$$-398 = 308\ \hat{B}_2$$

$$\hat{B}_2 = \frac{-398}{308} = \boxed{-1.29}$$

$$\hat{B}_0 = 88 - \frac{20}{3}\ (-1.29)$$

$$\hat{B}_0 = 88 + 8.6 = \boxed{96.6}$$

وبعد تقدير قيم ثوابت المعادلة يمكن وضعها في الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{Y} = 96.6 + 4.63\,x - 1.29\,x^2$$

كما يمكن استخدام محدد كرامر لحل تلك المعادلات الختزلة وذلك على النحو التالي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 60 \\ 60 & 708 \end{vmatrix} = 2772$$

$$|\hat{B}_0| = \begin{vmatrix} 792 & 60 \\ 4882 & 708 \end{vmatrix} = 267816$$

$$|\hat{B}_2| \quad \begin{vmatrix} 9 & 792 \\ 60 & 4882 \end{vmatrix} = 3582$$

$$\hat{B}_0 = \frac{267816}{2772} = \boxed{96.61}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{-3582}{2772} = \boxed{-1.29}$$

- الحل بطريقة المصفوفات :

يتم صياغة المعادلات الطبيعية في صورة المصفوفات وذلك على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} 792 \\ 278 \\ 4882 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 60 \\ 0 & 60 & 0 \\ 60 & 0 & 708 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}\, y = (x'\ x)\ (\underline{\hat{B}})$$

$$(\underline{\hat{B}}) = (x'\ x)^{-1}\ (x'y)$$

وعلى ذلك يتعين إيجاد معكوس المصفوفة كالآتـــــي :

$$|\ A\ | = 382320 - 216000 = \boxed{166320}$$

$$C = \begin{pmatrix} 42480 & 0 & -3600 \\ 0 & 2772 & 0 \\ -3600 & 0 & 540 \end{pmatrix}$$

وهي تمثل المصفوفة المجاورة لأنها متماثلة .

وبقسمة عناصر هذه المصفوفة على المحدد نحصل على معكوسها وذلك على النحو التالي :

$$(\bar{x}\ \bar{x})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{42480}{166320} & 0 & \frac{-3600}{166320} \\ 0 & \frac{2772}{166320} & 0 \\ \frac{-3600}{166320} & 0 & \frac{540}{166320} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42480}{166320} & 0 & \frac{-3600}{166320} \\ 0 & \frac{2772}{166320} & 0 \\ \frac{-3600}{166320} & 0 & \frac{540}{166320} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 792 \\ 278 \\ 4882 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 96.165 \\ 4.633 \\ -1.292 \end{pmatrix}$$

$\hat{B}_0 = 96.615 \qquad \hat{B}_1 = 4.633 \qquad \hat{B}_2 = 1.292$

وهي نفس النتائج التي تم التوصل إليها سابقاً .

- اختبار معنوية النمـــــــوذج **F- test**

$$T.S.S = \Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}$$

$$= 72520 - \frac{(792)^2}{9} = 2824$$

$$\text{Regression S.S} = \hat{B}_0 \ \Sigma y + \hat{B}_1 \ \Sigma xy + \hat{B}_2 \ \Sigma x^2 - n\bar{y}^2$$

$$= (96.615)(792) + (4.633)(278) + (-1.292)(4882) - (9)(7744)$$

$$= 76519.08 + 1287.974 - 6307.544 - 69696$$

Reg. S.S. = 1803.51

S.V	S.S	d.f	M.S	F-ratio
Regression	1803.51	2	901.755	5.302
Residual	1020.49	6	170.582	
Total	2824	8		

$F_{.05}(2,6) = 5.14$

$5.302 > 5.14$

إذا النموذج معنوي على مستوى معنوية ٥٠ر .

- إيجاد معنوية معاملات الانحـــدار الجزئية : **T – test**

$$Var(B) = (x'x)^{-1} S^2 = C S^2$$

S^2 = Residual Mean Squares

$S^2 = 170.082$

$$CS^2 = \begin{pmatrix} S^2 C_{00} & S^2 C_{01} & S^2 C_{02} \\ S^2 C_{01} & S^2 C_{11} & S^2 C_{12} \\ S^2 C_{20} & S^2 C_{21} & S^2 C_{22} \end{pmatrix}$$

$$Var(\hat{B}) = \begin{pmatrix} 43.441 & 0 & -3.681 \\ 0 & 2.835 & 0 \\ -3.681 & 0 & 0.552 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_0 : t = \frac{\hat{B}_0}{\sqrt{Var(\hat{B}_0)}} = \frac{96.615}{\sqrt{43.441}} = 14.659$$

$$\hat{B}_1 : t = \frac{B_1}{\sqrt{Var(\hat{B})_1}} = \frac{4.633}{\sqrt{2.835}} = 2.751$$

$$B_2 : t = \frac{\hat{B}_2}{\sqrt{Var(\hat{B}_2)}} = \frac{-10292}{\sqrt{0.552}} = -1.739$$

من الجدول : $T_{.05}(6) = 2.447$

وبمقارنة قيم (t) المقدرة للمعاملات الثلاث بتلك القيمة الجدولية يتبين :

(*) معنوية كل من $\hat{B}_0 \ , \ \hat{B}_1$

(**) عدم ثبوت معنوية $\hat{B}_2$ على مستوى ٠٥ر٠ .

لذا فإنه لا يمكن الاعتماد على معادلة الدرجة الثانية في التنبؤ ومن ثم فإن بيانات الاستثمارات توافقها معادلة من الدرجة الأولــى وبالتــالي يمكــن الاعتماد في التنبؤ (أي معادلة الدرجة الأولى) .

الفصل الرابع

التنبؤ من خلال تحليل الانحــدار المتعدد

ترجع أهمية تحليل الانحــدار المتعــدد إلـــى أن معظـــم الظـــواهر الاقتصادية أو الإدارية أو الاجتماعية لا تتوقف قيمة المتغير التابع فيها علـــى متغير مستقل واحد ، بل على العديد من المتغيرات المستقلة ، فعلى سبيل المثال في مجال التحليل الاقتصادي للطلب على الخدمة السـياحية لا يتوقـف علـى سعرها فقط ، بل يتوقـف على عدة عوامل أخـرى منهـا مسـتوى دخـول السائحين ، أسعار الخدمة السياحية المنافسة وكذلك أذواق السائحين واسـتقرار الأوضاع السياسية والاجتماعية وما إلى ذلك من العوامل .

ويمكن صياغة نموذج الانحدار الخطي المتعدد في الصورة الرياضية التالية :

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

ولغرض تبسيط العمليات الحسابية ، فإننا نقتصر على علاقة انحدار تشتمل على متغيرين مستقلين يؤثران على المتغير التابع وذلك علـى النحـو التالي:

$$Y = f(x_1, x_2)$$

وعلى ذلك فإن معادلة الانحدار الخطي المتعدد الممثلة لتلك الدالة تأخذ الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_1 + \hat{B}_2 x_2$$

حيث :

القيمة التقديرية للمتغير التابع $\hat{Y} =$

المتغيران المستقلان المؤثران على العامل التابع $(x_1, x_2) =$

معالم معادلة الانحدار الخطي المتعدد $(\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2)$

$\hat{B}_0$ = Intercept

وهي الجزء المقطوع من المحور الرأسي (y) عندما :

$$X_1, \quad X_2 \quad = \quad 0$$

معامل الانحدار الجزئي $\hat{B}_1 = (Y/X_1)$

وهي تعني انحدار المتغير التابع (Y) على المغير (X_1) مع افتـــراض ثبـــات المتغير المستقل الآخر (X_2) عند مستوى معين . لذلك نجد أن هـــذا المعامـــل يقيس التغير في (Y) نتيجة تغير (X_1) بوحدة واحدة مـــع ثبـــات (X_2) عنـــد مستوى معين . ويكتب المعامل بصورة صريحة كالآتـــــــــي :

$$\hat{B}_y\ 1.2$$

معامل الانحدار الجزئي (Y/X_2) $\hat{B}_2 =$

وهي معامل الانحدار الجزئي لانحدار المتغير التابع (y) على المتغير المستقل (X_2) مع افتراض ثبات (x_1) عند مستوى معين ، أي أن الصورة الممثلة لذلك المعامل هي :

$$\hat{B}_{y2.1}$$

ويمكن إعادة صياغة معادلة الانحدار الخطي المتعدد في الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_{y1..2} X1 + \hat{B}_{y2.1} X_2$$

ويتم تقدير ثوابت (معالم) المعادلة بتطبيق طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method والتي تتميز بالخاصيتين التاليتين :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)2 \quad \text{Is Minimum} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i^{\prime} : \sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_0\hat{} - B_1\hat{} x_1 - B_2\hat{} x2)^2 \text{ min.}$$

$$\frac{\partial \Sigma e i^2}{\partial \hat{B}_0} = -2 \quad \Sigma \quad (y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 - \hat{B}_2 x_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial B_1} = -2 \quad \Sigma x2 \quad (y i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 x_1 - \hat{B}_2 x_2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial e_i^2}{\partial B_2} = -2 \quad \Sigma x_2 \quad (yi - B_0\hat{} - B_1\hat{x}_1 - B_2\hat{x}_2) = 0 \quad (3)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (-2) مع إجراء العمليات الجبرية نحصل على المعاملات الثلاث التالية :

$$\Sigma Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \Sigma x_1 + \hat{B}_2 \Sigma x_2$$

$$\Sigma X_1 y_i = \hat{B}_0 \Sigma x_1 + \hat{B}_1 \Sigma x^2_1 + \hat{B}_2 \Sigma x_1 x^2_2$$

$$\Sigma X_2 y_i = \hat{B}_0 \Sigma x_2 + \hat{B}_1 \Sigma x_1 x_2 + \hat{B}_2 \Sigma x^2_2$$

وهذه المعالات هي المعادلات الطبيعية التي يمكن الاعتماد عليها في تقدير قيم ثوابت الدالة بأي طريقة من طرق التقدير الإحصائي .

طريقة محدد كرامر :

تعتبر هذه الطريقة من أبسط طرق التقدير التي يمكن استخدامها للحصول على قيمة المجاهيل الثلاثة .

وفيما يلي توضيح خطوات تطبيق تلك الطريقة :

المحدد الأساسي

$$|A| = \begin{vmatrix} N & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x^2_2 \end{vmatrix}$$

محدد $(\hat{B}_0)$

$$|\hat{B}_0| = \begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma X_1 y & \Sigma x^2_1 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma X_2 y & \Sigma x_2 y & \Sigma x^2_2 \end{vmatrix}$$

محدد $(\hat{B}_1)$

$$|\hat{B}_1| = \begin{vmatrix} \Sigma N & \Sigma y & \Sigma x_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1Y & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2Y & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}$$

محدد $(\hat{B}_2)$

$$|\hat{B}_2| = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma y \\ \Sigma X_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1y \\ \Sigma X_2 & \Sigma x_1x_2 & \Sigma x_2y \end{vmatrix}$$

وبعد ذلك يمكن تقدير قيمة المعالم الثلاث على النحو التالي :

$$\hat{B}_0 = \frac{|\hat{B}_0|}{|A|}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|\hat{B}_1|}{|A|}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{|\hat{B}_2|}{|A|}$$

طريقة انحرافات المتغيرات عن أوساطها الحسابية:

من المعروف أن انحرافات القيم عند متوسطاتها الحسابية تساوى صفراً ، أي أن :

$$\Sigma\,(x_1 - \bar{x}_1) = \Sigma\,\chi_1 = 0$$

$$\Sigma\,(x_2 - \bar{x}_2) = \Sigma\,\chi_2 = 0$$

وفي هذه الحالة نكون قد نقلنا نقطة الأصل بالنسبة للمعادلات الطبيعية الثلاث السابقة من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ ، ويترتب على ذلك أن ينخفض عدد المعادلات الطبيعية إلى معادلتين فقط في صورة انحرافات عن الأوساط الحسابية :

$$\Sigma\,\chi_1 y = \hat{B}_1\ \Sigma\,\chi_1^2 + \hat{B}_2\ \Sigma\,\chi_1\chi_2$$

$$\Sigma\,\chi_2 y = \hat{B}_1\ \Sigma\,\chi_1\chi_2 + B_2.\ \Sigma\,\chi_2^2$$

ومنها يمكن إيجاد قيمة المجاهيل باستخدام محدد كرامر :

$$\hat{B}_0 = \frac{\Sigma\ y}{n} = \bar{Y}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \Sigma\,\chi_1^2 & \Sigma\,\chi_1.\chi_2 \\ \Sigma\,\chi_1\chi_2 & \Sigma\,\chi_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\hat{B}_1\right| = \begin{vmatrix} \Sigma \chi_1 y & \Sigma \chi_1 \chi_2 \\ \Sigma \chi_2 y & \Sigma \chi_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\hat{B}_2\right| = \begin{vmatrix} \Sigma \chi_1^2 & \Sigma \chi_1 y \\ \Sigma \chi_1 \chi_2 & \Sigma \chi_2 y \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\left|\hat{B}_1\right|}{\left|A\right|} \qquad \hat{B}_2 = \frac{\left|\hat{B}_2\right|}{\left|A\right|}$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \chi_1 + \hat{B}_2 \chi_2$$

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 (x_1 - \bar{x}_1) + B_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

طريقة المصفوفات :

يمكن استخدام المصفوفات في حل المعادلات الطبيعية الثلاث وإيجاد قيمة ثوابت الدالة الانحدارية . ويتحقق ذلك من خـلال صـياغة المعـادلات الطبيعية الثلاث في صورة المصفوفات وذلك على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1 y \\ \Sigma X_2 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x1\ x2 & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix}$$

$$x'y = (x'x)\ (\hat{B})$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1}\ (x'y)$$

مثال :

الجدول التالي يبين الدخل الشهري وعدد سنوات الخبرة وعدد الدورات التدريبية لثمانية من العاملين في قطاع الخدمة الفندقية .

Y	240	270	220	210	370	400	450	320
الخبرة X_1	7	8	5	7	10	10	9	8
التدريب X_2	2	3	2	1	5	6	8	5

المطلوب :

(١) تقدير معالم دالة الانحدار الخطي المتعدد .

(٢) اختبار معنوية النموذج الانحـداري .

(٣) اختبار معنوية معاملات الانحدار الجزئية .

(٤) التنبؤ بأثر زيادة عدد سنوات الخبرة إلى ١٢ سنة ، وزيادة عدد الدورات التدريبية السنوية إلى ١٠ دورات على متوسط الدخل الفردي للعاملين في هذا القطاع .

الحـــل :

Y	X_1	X_2	χ_1	χ_2	$\chi_1\chi_2$	$\chi_1 y$	$\chi_2 y$	χ_1^2	χ_2^2	Y^2
240	7	2	-1	-2	2	-240	-480	1	4	57600
270	8	3	0	-1	0	0	-270	0	1	72900
220	5	2	-3	-2	6	- 660	-440	9	4	48400
210	7	1	-1	-3	3	- 210	-630	1	9	44100
270	10	5	2	1	2	-740	-370	4	1	136900
400	10	6	2	2	4	800	800	4	4	160000
450	9	8	1	4	4	450	1800	1	16	202500
320	8	5	0	1	0	0	320	0	1	102400
2480	64	32	0	0	21	880	1470	20	40	824800
$\bar{Y}$ = 310	$\bar{X}_1$= 8	$\bar{X}_2$= 4								

ونقوم بعد ذلك بالتعويض في المعادلتين الطبيعيتين التاليتين :

$$\Sigma \chi_1 Y = \hat{B}_1 \ \Sigma \chi_1^2 + \hat{B}_2 \ \Sigma \chi_1 \ \chi_2$$

$$\Sigma \chi_2 Y = \hat{B}_1 \ \Sigma \chi_1 \chi_2 + \hat{B}_2 \ \Sigma \chi_2^2$$

$$880 = 20 \hat{B}_1 + 21 \ \hat{B}_2$$

$$1470 = 21 \hat{B}_1 + 40 \ \hat{B}_2$$

وباستخدام محدد كرامر يمكن إيجاد قيمة كل من $\hat{B}_1 , \ \hat{B}_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 20 & 21 \\ 21 & 40 \end{vmatrix} = 800 - 441 = 359$$

$$|\hat{B}_1| = \begin{vmatrix} 880 & 21 \\ 1470 & 40 \end{vmatrix} = 35200 - 30870 = 4330$$

$$|\hat{B}_2| = \begin{vmatrix} 20 & 880 \\ 21 & 1470 \end{vmatrix} = 29400 - 18480 = 10920$$

$$\hat{B}_1 = \frac{4330}{359} = 12.061$$

$$\hat{B}_2 = \frac{10920}{359} = 30.418$$

$$\hat{B}_0 = \frac{\Sigma Y}{n} = \overline{y} = 310$$

$$\hat{Y} = 310 + 12.061\ \chi_1 + 35.418\ \chi_2$$

$$= 310 + 12.061\,(x_1 - \bar{x}_1) + 30.418\,(x_2 - \bar{x}_2)$$

$$= 310 + 12.061\,(x_1 - 8) + 30.418\,(x_2 - 4)$$

$$= 310 + 12.061\,x1 - 96.488 + 30.418\,x2 - 121.672$$

$$\boxed{\hat{Y} = 91.84 + 12.061\,x1 + 30.418\,x_2}$$

اختبار معنوية نموذج الانحـدار المتعدد :

يلي تقدير معالم دالة الانحدار الخطي المتعدد اختبـار معنويـة ذلـك النموذج من خلال تطبيق اختبار F-test .

$$T.S.S = \Sigma\ Y^2 - \frac{\Sigma\ Y^2}{n}$$

$$= 824800 = \frac{(2480)^2}{8} = 65000$$

$$\text{Regression S.S} = \Sigma \left[(\hat{B}_1 (x_1 - \bar{x}_1) + \hat{B}_2 (x_2 - \bar{x}_2) \right]$$

$$= \Sigma \left[\hat{B}_1 \chi_1 + \hat{B}_2\ \chi_2 \right]$$

$$\text{Reg. S.S.} = \hat{B}^2_1\ \Sigma\ \chi^2_1 + 2\,\hat{B}_1\,\hat{B}_2\ \Sigma\,\chi_1\,\chi_2 + \hat{B}^2_2\ \Sigma\chi^2_2$$

$$Reg.\ S.S. = (12.061)^2(20) + 2(12.061)(30.418)(21)(30.418)^2\ (40)$$

$$Reg.\ S.S = 553228.146$$

$$Residual\ S.S = 55328.146$$

S.V	S.S	d.f	M.S	F-ratio
Regression	55328.146	2	27664.073	
				205.878
Residual	671.854	5	134.371	
Total.	56000	7		

$$F_{.01}\ (2,5) = 13.279$$

ومن الواضح أن قيمة (F) المقدرة أكبر من نظيرتها الجدولية على مستوى معنوية ۰١ر ، مما يشير إلى معنوية النموذج الانحداري عند هذا المستوى.

اختبار معنوية معاملات الانحدار الجزئية :

بعد ثبوت معنوية النموذج من واقع تطبيق اختبار F ، فإنه يجب اختبار معنوية معاملات الانحدار الجزئية وذلك بتطبيق اختبار (t) وذلك وفقاً للمعادلة التالية :

$$t = \frac{\hat{B}_i}{S_{\hat{B}}}$$

حيث :

$$S_{\hat{B}} = \text{Standard Error of } (\hat{B}_i)$$

ويمكن تقدير الخطأ المعياري في مثالنا هذا وذلك وفقاً للمعادلتين التاليتين :

$$S_{\hat{B}1} = \frac{S}{\sqrt{\Sigma \chi_1^2 - \frac{(\Sigma \chi_1 \chi_2)2}{S_B\hat{}}}}$$

$$S_{\hat{B}2} = \frac{S}{\sqrt{\Sigma \chi_2^2 \quad \frac{(\Sigma \chi_1 \chi_2)^2}{\Sigma \chi_1^2}}}$$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين نحصل على النتائج التالية :

$$S_{\hat{B}1} = \frac{11.592}{\sqrt{20 - \frac{(21)^2}{40}}} = \frac{11.592}{2.996} = 3.869$$

$$S_{\hat{B}2} = \frac{11.592}{\sqrt{40 - \frac{(21)^2}{20}}} = \frac{11.592}{4.592} = 2.736$$

$$t_{B1}\hat{} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}1}} = \frac{12.061}{3.869} = 3.117$$

$$t_{\hat{B}2} = \frac{\hat{B}2}{S_{\hat{B}2}} = \frac{30.418}{2.736} = 11.118$$

$$t_{.05}\ (5) = 2.571$$

وحيث أن قيمتي $t_{\hat{B}1}$, $t_{\hat{B}2}$ > الجدولية على مستوى معنوية ٠٥ر ، فإن ذلك يشير إلى معنويتهما إحصائياً .

التنبؤ بأثر زيادة سنوات الخبرة إلى ١٢ سنة وعدد الدورات التدريبية إلى عشر دورات :

$$\hat{Y} = 91.84 + 12.061\ x_1 + 30.418\ x2$$

$$= 91.84 + 12,061\ (12) + 30.418\ (10)$$

$$= 91.84 + 144.732 + 304.18$$

$$\hat{Y} = 540.752$$

أي أنه من المتوقع أن يصل الدخل الشهري إلى حوالي ٥٤١ جنيهاً في المتوسط .

الفصل الخامس

اختبار الفروض الإحصائية

Testing the Statistical Hypotheses

يعتبر اختبار الفروض الإحصائية الخطوة المنطقية التاليــة للتقــدير ، حيث قد يهتم الباحث باختبار معنوية بعض المعالم التي حصل عليها من عملية التقدير . فنظراً لأن معالم المجتمع Parameters غير معروفة للباحث ، فإنــه يقوم بإجراء التجارب أو الاستبيانات الإحصائية لتقــدير إحصــاءات مختلفــة Statistics من العينات ، وبعد ذلك يستخدم الباحث إحصــاءات العينــة فــي محاولة تقدير معالم المجتمع ، كما قد يكون الغرض من تقدير الإحصاءات هو اختبار نظرية معينة ، يضعها الباحث ثم يختبرها .؟ وعلى ذلك يعتبر اختبــار الفروض الإحصائية من أهم الموضــوعات فــي مجــال اتخــاذ القــرارات Decision.

النظرية الفرضية (فرض العدم) Null Hypothesis

يقوم الباحث بفرض نظرية معينة ثم يختبرها عن طريق التجــارب أو جمــع المشاهدات للتأكد من صحتها وعلى أساس النتــائج يــرفض أو يقبــل النظريــة . هذا وقد سمي بفرض العدم لأن الباحث يضعه علــى أســاس أن يرفضه . فمثلاً إذا أرد الباحث أن يقارن صنفاً جديداً من سلعة معينة بنظيرتها التقليدية ، فإنه يضع فرضية فحواها : "عدم وجود فرق جوهري أو معنوي بين الصنفين" . ويرمز له بالرمز : H_0 .

الفرض البديل : Alternative Hypothesis

وهو الفرض المقابل لفرض العدم ، ذلك أن رفضنا لفرض العدم يقودنا إلى قبول فرض بديل عنه ويرمز له بالرمز : Ha . وعلى ذلك يتمثل الفرض البديل في وجود فرق معنوي بين الصنفين موضوع المقارنة .

أنواع الأخطاء التي نتعرض لها عند إجراء اختبارات الفروض :

خطأ النوع الأول : Type I Error

يقع الباحث في خطأ النوع الأول إذا رفض فرض العدم عندما يكون صحيحاً .

خطأ النوع الثاني : Type II Error

يقع الباحث في خطأ النوع الثاني إذا قبل فرض العدم عندما يكون خاطئاً .

ويمكن توضيح ذلك في الجدول التالي والذي يعرض العلاقة بين القرار المتخذ والحالة الحقيقية .

الحالة الحقيقية / القرار المتخذ	H_0 صحيح	H_0 خطأ
قبول H_0	قرار صائب	خطأ النوع الثاني Type II Error
رفض H_0	خطأ النوع الأول Type I Error	قرار صائب

مستوى المعنوية : Level of Significance

يمكن تعريف مستوى المعنوية على أنه درجة الاحتمال الذي على أساسه يتم رفض فرض العدم (H_0) عندما يكون صحيحاً . أو بعبارة أخرى هو احتمال حدوث خطأ من النوع الأول ، ويرمز له بالرمز (a) أي أن :

$$a = P(\text{Type I Error}).$$
$$= P(\text{reject Ho} \mid \text{Ho Is True}).$$

وتجدر الإشارة إلى أنه في معظم العلوم التطبيقية يتم استخدام مستوى معنوية ٠٥ر أو ٠١ر وإن كانت هناك قيم أخرى مختلفة . وتعني كلمة معنوية أن الفروق بين معالم المجتمع وتقديرات العينة حقيقية وكبيرة بحيث لا يمكن أن تعزى إلى الصدفة . ويعني مستوى المعنوية ٠٥ر (٥%) أنه من المحتمل أن نرفض فرض العدم (H_0) وهو صحيح خمس فرص من مائة فرصة ، أي أننا واثقون من قرارنا بنسبة ٩٥% بأنه قرار سليم . أما مستوى المعنوية ٠١ر (١%) فهو يعني أنه من المحتمل أن نرفض فرض العدم (H_0) – بالرغم من صحته – فرصة واحدة من مائة فرصة ، أي أن احتمال الوقوع في خطأ في الاستنتاج من النوع الأول هو ١% ، وأن الاستنتاج يكون صحيحاً بدرجة ثقة ٩٩% .

أما في حالة قبول فرض العدم رغم أنه خاطئ ، فإننا نكون قد وقعنا في خطأ النوع الثاني ويرمز له بالرمز بيتا (B) أي أن :

B $\quad = P$ (Type II Error)

$\quad = P$ (accept H_o / H_o is falser)

العلاقـــة بين الخطأ الأول والخطـــأ الثاني : يمكن توضيح العلاقة بين الخطأين (ألفا ، بيتا) كما يلي :

(١) مع ثبات حجم العينة فإن احتمال الخطأ الأول لا يمكـــن خفضـــه دون زيادة احتمال الخطأ الثاني في نفس الوقت .

(٢) مع ثبات حجم العينة فإن احتمال الخطأ الثاني لا يمكـــن خفضـــه دون زيادة احتمال الخطأ الأول في نفس الوقت .

(٣) يكون احتمال الخطأ الثاني صغيراً كلما زاد الفرق بين الوسط الفرضي والوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع .

(٤) مع ثبات احتمال الخطأ الأول فإن احتمال الخطأ الثاني سينخفض كلمـــا زاد حجم العينة.

(٥) مع ثبات احتمال الخطأ الثاني فإن احتمال الخطأ الأول سينخفض كلمـــا زاد حجم العينة.

(٦) يمكن خفض احتمال الخطأ الأول والخطأ الثاني في نفس الوقت للدرجة المطلوبة بزيادة حجم العينة بدرجة كافية .

قوة الاختبار الإحصائي Power of the test

يمكن تعريف قوة الاختبار بأنها مقدرة الاختبار الإحصائي لاكتشـــاف الفرض البديل عندما يكون صحيحاً ، أو بمعنى آخر رفض فرض العدم عندما يكون خاطئاً ، ولذلك فإن قوة الاختبار هي :

Power of the test $= 1 - \beta$

ومن الملاحظ أن هناك علاقة بين قيمة (β) وقوة الاختبار مؤداها أنه كلما قلت قيمة (β) زادت قوة الاختبار .

منطقة الرفض : Rejection Region

تعرف منطقة الرفض بأنها تلك المنطقة التي إذا وقعت داخلها قيمة الاختبار الإحصائي ، فإنه يتم رفض فرض العدم (H_o) .

منقطة القبول : Acceptance Region

تعرف على أنها تلك المنطقة التي إذا وقعت قيمة الاختبار الإحصائي داخلها ، فإنه يتعين قبول فرض العدم (H_o) .

وعادة يتم مقارنة قيمة الاختبار الإحصائي المحسوب من العينة مع قيمته المستخرجة من توزيعه الاحتمالي (جداول خاصة) ، وذلك للوصول إلى قرار رفض أو قبول فرض العدم.

أنواع الاختبارات :

هناك ثلاث أنواع من الاختبارات هي :

(١) **اختبار الطرف الأيسر :** Left side test

يتم إجراء هذا الاختبار عندما يكون فرض العدم (H_o) هو :

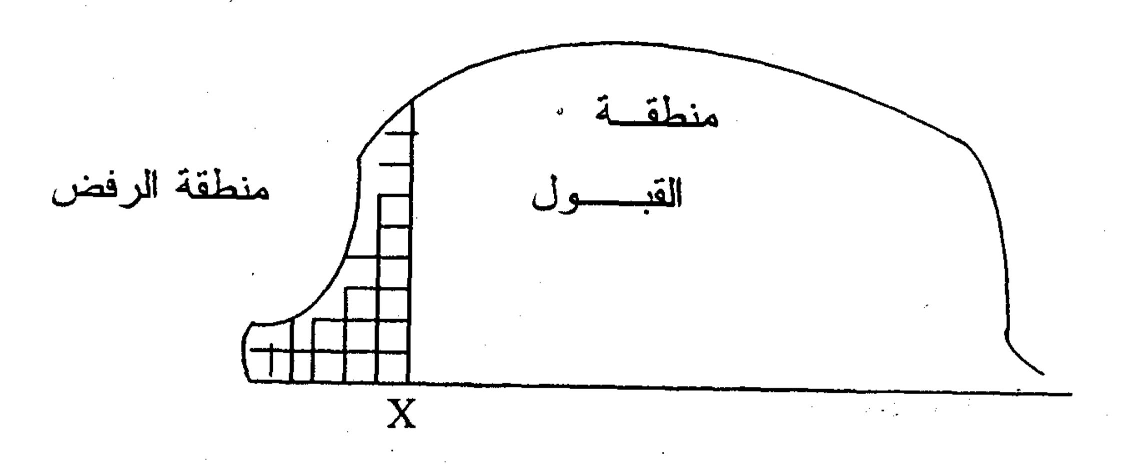
$$H_o : M = M_o$$

والفرض البديل هو :

$$H_a : M < M_o$$

حيث : Mo = قيمة توقع المجتمع ، ويعتبر الوسط الحسابي المحسوب من بيانات عينة مسحوبة من المجتمـــع حجمهـــا (n) تقديراً للقيمة المتوقعة .

ويمكن توضيح ذلك الاختبار في الشكل البياني التالي :



فإذا كانت قيمة (z) المحسوبة أقل من القيمة (x) المستخرجة من جـــدول التوزيع الطبيعي المعياري على مستوى المعنوي المطلوب ، فإننا نرفض الفرض . أما إذا كانت (z) أكبر من (x) فإننا نقبل الفرض .

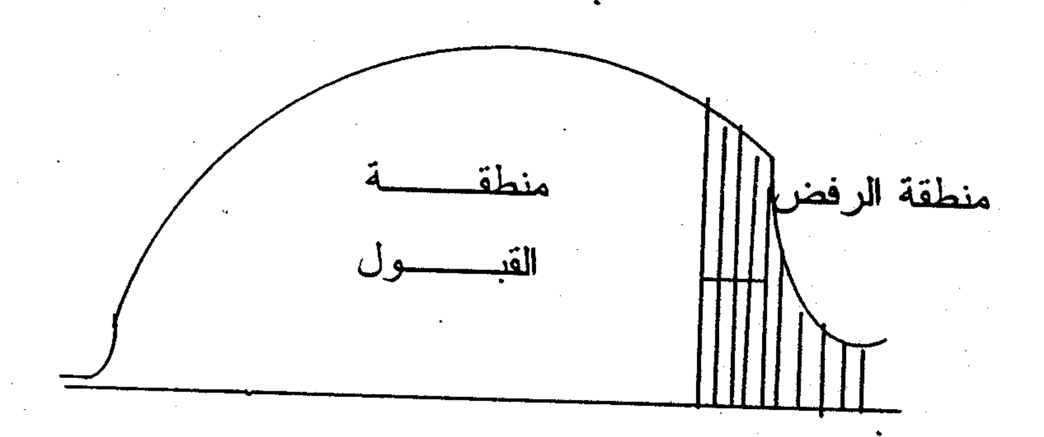
(٢) **اختبار الطرف الأيمن :** Right Side Test

يتم إجراء هذا الاختبار عندما يكون :

فرض العدم $H_o : M = M_o$

الفرض البديل $H_a : M > M_o$

وذلك كما هو مبين بالشكل البياني التالي :



فإذا كانت قيمة (z) المحسوبة أكبر من قيمة (Y) الجدولية عند مستوى المعنوية المحدد **نرفض** فرض العدم (H_o) . أما إذا كانت (z) أقل من (Y) الجدولية **نقبل** فرض العدم .

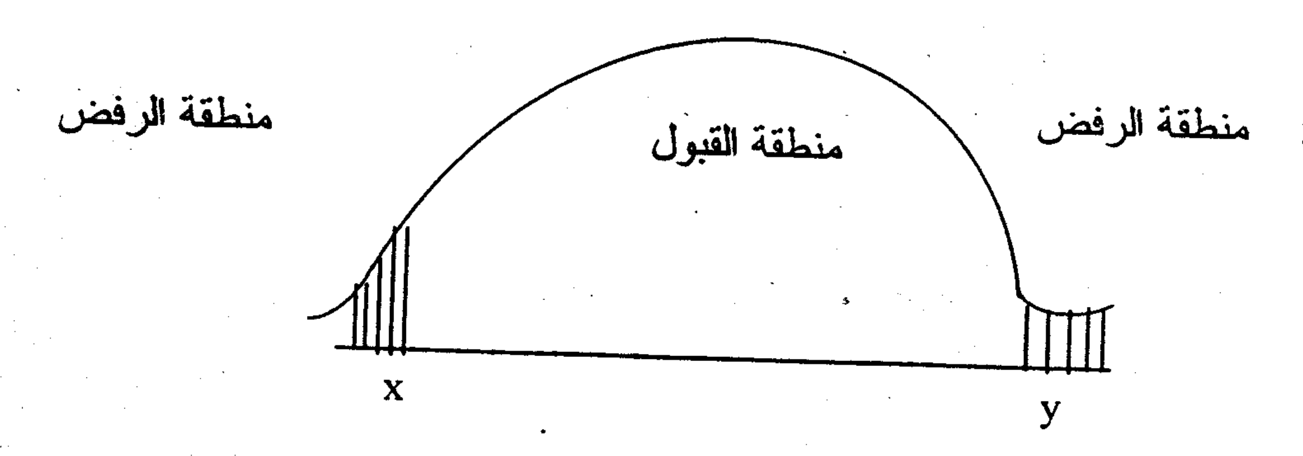
(٣) اختبار الطرفين : Two Tailed Test

يجري هذا الاختبار عندما يكون :

$H_o \quad : M = M_o$

$H_a \quad : M \neq M_o$

ويمكن توضيح ذلك في الشكل البياني التالي :



ومن الملاحظ أنه في هذه الحالة فإننا **نقبل** فرض العدم (H_0) إذا كانــت قيمة (z) المحسوبة تقع بين (x, y) المستخرجة من الجدول مع ملاحظة أن :

$$Y \quad = x$$

لأن التوزيع متماثل .

كما نرفض فرض العدم إذا كانت قيمة (z) تقع خارج (X، Y) .

بعض نماذج اختبارات الفروض

أولاً : الاختبارات المعلمية : Parametric Test

وتسمى الاختبارات المعلمية لأنها تعالج مسائل ذات علاقة بمعالم التوزيعات الاحتمالية مثل الوسط الحسابي (M) والتباين (σ^2) وسوف نتناول فيما يلي بعض نماذج هذه الاختبارات :

(١) اختبارات الفروض الإحصائية للقيمة المتوقعة (المتوسط) للمجتمع :

أ- عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ^2) معلوماً : عند سحب عينة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بتوقع (M). وتباين (σ^2) فإذا كانت (σ^2) معلومة ، فإن اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بقيمة (M) أي توقع المجتمع تعتمد على توزيع المعاينة للمتغير ($\bar{x}$) أي الوسط الحسابي للعينة ، وحيث أن ($\bar{x}$) يتوزع توزيعاً طبيعياً بتوقع (M) وانحراف معياري ($\sqrt{\frac{\sigma}{n}}$) ، وحيث أن قيمة (σ^2) للمجتمع معلومة ، فإنه يمكن تطبيق الاختبار التالي :.

$$Z = \frac{\bar{X} - M}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وهذا المتغير عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ويمكن استخدام هذه النتيجة في اختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة للمجتمع وذلك بإتباع الخطوات التالية :

نبدأ بتحديد فرض العدم (Ho) .

- تحديد الفرض البديل ، ومنه يتحدد نوع الاختبار واتجاهه (من طرف واحد أو طرفين) .
- تحديد التوزيع المستخدم في الاختبار .
- تحديد منطقة قبول أو رفض فرض العدم ، أي بمعنى آخر تحديد مستوى المعنوية ، والذي يحدد الحدود الفاصلة بين منطقتي القبول أو الرفض بناء على نوع الاختبار ونوع التوزيع المستخدم .
- يتم تقدير قيمة الاختبار الإحصائي من واقع بيانات العينة وبناء على قيمته يمكن تحديد قبول أو رفض فرض العدم فإذا وقعت قيمة الاختبار الإحصائي المقدر من العينة في منطقة الرفض نرفض فرض العدم والعكس صحيح ومما هو جدير بالذكر أنه حتى إذا لم يكن توزيع المجتمع الأصلي يتبع التوزيع الطبيعي ، فإن توزيع (Z) في هذه الحالة يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان حجم العينة كبيراً أي أن : $n \geq 30$

مثال (١) : تقوم إحدى شركات صناعة مساحيق الغسيل بتسويق منتجاتها في عبوات سعة كل منها ٥ كيلو جرام وذلك بانحراف معياري ٥ر كجم غير أنه تكررت شكوى المستهلكين من وجود نقص في وزن العبوة عن الوزن المقرر لذا فقد قامت إدارة حماية المستهلك بوزارة التموين باختبار الفرض الذي مؤداه أن متوسط وزن العبوة يساوي ٥ كيلو جرام مقابل الفرض البديل أن العبوات

في المتوسط أقل من ٥ كيلو جرام . وعلى ذلك قامت الإدارة باختيار عينة عشوائية من ١٠٠ عبوة ، وتبين أن متوسط الوزن الصافي للعبوة في العينة يساوي ٤,٨ كيلو جرام ، مستنداً إلى بيانات العينة المسحوبة من المجتمع هل ترى أن المستهلكين لهم الحق في شكواهم من نقص الوزن الصافي للعبوة .

الحل :

فرض العدم : $H_0 :\ M \geq 5$

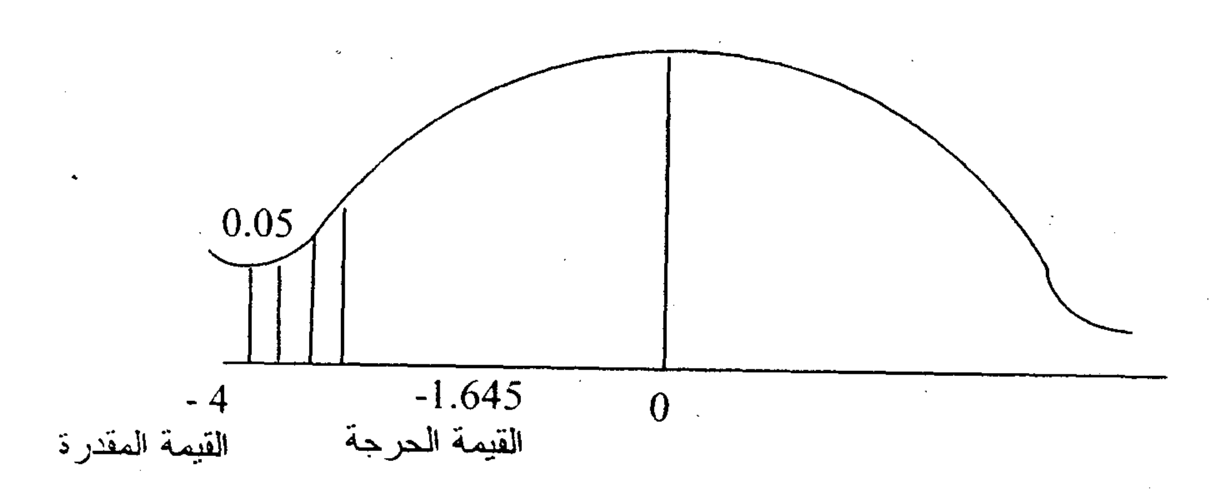
الفرض البديل : $H_a :\ M < 5$

مستوى المعنوية : $a = 5\%$

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{4.8 - 5}{0.5 / \sqrt{100}} = \frac{-0.2}{0.05} = \boxed{-4}$$

ومن الملاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة تساوي (4-) تقع في منطقة الرفض وذلك على مستوى معنوية ٥% . وعلى ذلك فإننا نرفض النظرية الفرضية بأن متوسط وزن العبوة يساوي ٥ كيلو جرام ونقبل الفرض البديل الذي مؤداه أن متوسط وزن العبوة يقل عن ٥ كيلو جرام ، ومن ثم فإن المستهلكين لهم الحق في شكواهم ويمكن تصوير ذلك بيانياً في الشكل التالي :



حيث أن $(a = 0.05)$ ، فإن القيمة الحرجة في الجانب الأيسر

= | 1.645 | ←—— من جدول (t) .

ب- عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ^2) مجهولاً :

نظراً لأن تباين المجتمع غير معلوم فإن الاختبار الإحصائي (Z) لا يصلح للاستخدام في اختبار الفروض الإحصائية ، ولكن يستخدم اختبار (T) بدلاً منه . وفيما يلي معادلة الاختبار :

$$T = \frac{\bar{X} - M}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

وفي هذه الحالة نستخدم تباين العينة (S^2) ويتم تقديره وفقاً للمعادلة التالية:

$$S^2 = \frac{\Sigma x2 - \frac{(\Sigma x^2)}{n}}{n-1}$$

وذلك كتقدير غير متحيز لتباين المجتمع .

مثال (٢) : من المفروض أن يقوم أحد مصانع إنتـاج المـواد الغذائيـة المحفوظة بإضافة ١٠ ملليجرام من مكسبات الطعم لكل علبة من منتج غذائي معين . فإذا سحبت عينة عشوائية من ٨ علب مـن إنتاج هذا المصنع ، وتم تقدير كمية المادة المضافة لكل علبة ، وكانـت نتائج العينة على النحو التالي :

9, 12, 11, 10, 13, 11, 11, 11

والمطلوب معرفة هل يختلف متوسط العينة المقدرة عن الكمية المفروض إضافتها من هذه المادة باحتمال ٥% .

الحــل :

$$T = \frac{\bar{X} - m}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ولتطبيق تلك المعادلة يتعين أولاً تقدير كل من متوسط العينة وتباينها وذلك على النحو التالي :

(١) تقدير متوسط العينة :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{88}{8} = 11$$

(٢) تقدير الانحراف المعياري للعينة (S) :

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}{n-1}}$$

$$\Sigma X^2 = 81 + 144 + 121 + 100 + 169 + 121 + 121 + 121$$

$$\Sigma X^2 = 978$$

$$S = \sqrt{\frac{978 - 968}{7}} = \sqrt{1.42857} = \boxed{1.195}$$

$$T = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}}$$

$$T = \frac{11-10}{1.195/\sqrt{8}} = \frac{1}{1,195/20828} = \frac{1}{0.42} = \boxed{2.381}$$

قيمة (t) الجدولية $t_{.05}(7) = 2.365$

وحيث أن (T) المحسوبة > t الجدولية .

إذاً يوجد فرق معنوي بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ، وهذا يعني أن الكمية المضافة فعلاً من المادة لا تتساوى مع الكمية المفروض إضافتها .

مثال (٣) : تشير إحصاءات إحدى الدول النامية إلى أن متوسط الدخل الفردي الشهري هو ٢٠٥ دولار ، غير أن صندوق النقد الدولي يزعم أن المتوسط يقل عن ذلك المعدل ، ولاختبار مدى صحة هذا الزعم فقد تم سحب عينة من ٣٠ مفردة من هذا المجتمع ، ومنها تم تقدير متوسط الدخل الشهري والذي بلغ ١٦٤,٥ دولار ، بينما قدر تباين العينة بحوالي ١٩٦ . والمطلوب اختبار مدى صحة الزعم المذكور .

الحل :

$n = 30 \qquad S^2 = 196 \qquad \bar{X} = 164.5 \qquad M = 205$

فرض العدم : $H_0 : M = 205$

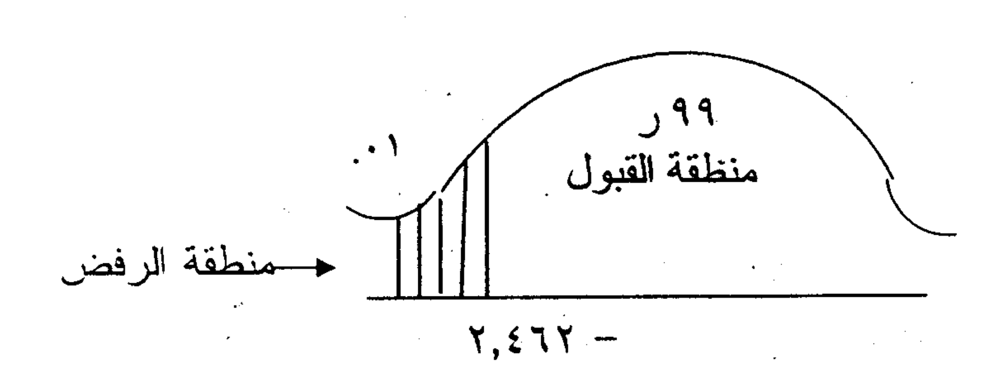
الفرض البديل : $H_a : M < 205$

$$T = \frac{\bar{X} - M}{S / \sqrt{n}} \qquad t\,(n-1)$$

$$T = \frac{164.5 - 205}{14 / \sqrt{30}} = \frac{-40.5}{14/5.477} = \frac{-40.5}{2.556} = \boxed{-15.845}$$

قيمة t الجدولية : $T_{.01}\,(29) = 2.462$

إذاً قيمة | T | المحسوبة > قيمة t الجدولية ، فهذا يعني وجود فرق معنوي بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ، أي أننا نرفض فرض العدم ونقبل زعم صندوق النقد الدولي بأن متوسط الدخل الشهري يقل عن ٢٠٥ دولار وذلك بدرجة ثقة ٩٩% .



(٢) اختبارات الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين :

نتناول في هذا الصدد اختبار الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً ، وسوف نعرض حالتين هما العينات المستقلة والعينات غير المستقلة (البيانات المتناظرة) .

(أ) حالة العينات المستقلة :

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين ، نقوم بسحب عينة عشوائية من كل مجتمع . وبافتراض أن (M_1 , M_2) هي القيمة المتوقعة للمجتمع الأول والثاني على الترتيب ، فإنه يمكن صياغة الفروض كما يلي :

فرض العدم : $H_o = M_1 = M_2$ ar $M_1 - M_2 = 0$

الفروض البديلة :

$H_a : M_1 \neq M_2 \text{ ar } M_1 - M_2 \neq 0$

$H_a : M_1 > M_2 \text{ ar } M_1 - M_2 < 0$

$H_a : M^1 < M_2 \text{ ar } M_1 - M_2 < 0$

وتعتمد الاختبارات في هذه الحالة على توزيع العينات للمتغيــر العشوائي $(\overline{x_1 - x_2})$ والذي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقـــع $(M_1 - M_2)$ وتباين يتوقف على ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً أم لا :

(*) إذا كان تباين المجتمعين معلوماً $(\sigma_2^2 \quad , \quad \sigma_1^2)$:

في هذه الحالة نستخدم الاختبار التالي :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري مع افتراض صحة فرض العدم $(M_1 = M_2)$. وتجري خطوات تطبيق الاختبــار علـــى النحــو المذكور سلفاً .

(*) إذا كان تباين المجتمعين مجهولاً وحجم العينتين كبيراً :

في هذه الحالة يتم الاعتماد على تقديرات التباين من العينتين وهما (S_1^2 , S_2^2) وبافتراض أن حجم العينتين كان كبيراً ، أي أن :

$$n_1 + n_2 \geq 60$$

ونستخدم الاختبار التالي :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_1}}}$$

وهو أيضاً متغير عشوائي يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري مع افتـــراض صحة الفرض العدمي . ويجري تطبيق الإختبار وفقاً للخطوات سالفة الذكر .

(*) إذا كان تباين المجتمعين مجهولاً وحجم العينتين صغيراً :

في حالة ما إذا كان حجم العينتين صغيراً ، فإن الاختبار يعتمــد علـــى مـــدى تساوي أو اختلاف تباين المجتمعين .

إذا كانت. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

وفي هذه الحالة نقوم بحساب التباين التجميعي (التباين المشترك) وذلـــك علـــى النحو التالي :

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n^2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

حيث : تباين العينة الأولى $S_1^2 =$

تباين العينة الثانية $S_2^2 =$

وحيث أن حجم العينتين صغير ، فإننا نستخدم اختبـــار T وفقــاً للمعادلة التالية :

$$T = \frac{X_1 - X_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

هذا ويتبـــع المتغير العشوائـــــي (T) التوزيـــع (T) بدرجة حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ بافتراض صحة فرض العدم $(M_1 = M_2)$ وتتبع نفس خطوات التطبيق سالفة الذكر .

- إذا كان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

في هذه الحالة نستخدم المعادلة التاليـــة :

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع T بدرجة حرية (n) بافتراض صحة فرض العدم حيث :

$$N = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]}{\frac{\left[S_1^2 / n_1\right]}{n_1 - 1} + \frac{\left[S_2^2\right]}{n_2 - 1}}$$

وبتطبيق الاختبار يمكن اتخاذ القرارات على النحو التالي :

(*) إذا كان : $Ha : M_1 - M_2 \neq 0$ نرفض Ho عند مستوى معنوية

(δ) إذا كان : $T \; |\geq t| (n, a/2)$

(*) إذا كان : $Ha : M_1 - M_2 > 0$ نرفض Ho عند مستوى معنوية

(δ) إذا كان : $|T| \geq t_{(n,a)}$

(*) إذا كان = $Ha : m1 - m2 \leq 0$ نرفض H0 عنـــد مستـــــوى معنوية (δ) إذا كان $T \leq t_{(n,\ldots)}$.

مثال (١) الجدول التالي يعرض نتائج مسابقة في العلوم الاقتصادية بين عينتين إحداهما تمثل طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة والأخرى تمثل طـــلاب كليـــة التجارة جامعة أسيوط ، وذلك بواقع ٥٠ طالباً لكل منهما (مثال افتراضي).

بيـــان	كلية التجارة / القاهرة	كلية التجارة / أسيوط
متوسط الدرجات	$\bar{X}1 = 96$	$\bar{X}2 = 85$
التباين	$\sigma_1^2 = 64$	$\sigma_1^2 = 36$
حجم العينة	$n_1 = 50$	$n_2 = 50$

هل ترى من نتائج هذه الدراسة وجود فرق معنوي بين المستوى العلمي لطلاب كلية التجارة جامعة القاهرة وكلية التجارة جامعة أسيوط ؟ .

الحـــــل :

فرض العـــــدم : $H_o: M_1 = M_2$

الفرض البديل : $H_a : M1 \neq M_2$

إذاً الاختبار من طرفين .

وحيث أن حجم العينتين كبير ، فإنه سوف يتم تطبيق اختبار (z) على النحو التالي :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وهذا المتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة فرض العدم .

$$Z = \frac{96 - 85}{\sqrt{\frac{64}{50} + \frac{36}{50}}} = \frac{11}{\frac{11}{2}} = \frac{11}{\sqrt{1.414}} = \boxed{7.779}$$

وعند مستوى المعنوية 05 , ، نعلم أن منطقة القبـــول هـــي (1.96 ,1.96-) ، وعلى ذلك فإن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، أي يوجد فرق معنوي في المستوى التعليمي بين طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة وكليـــة التجـــارة جامعة أسيوط .

مثال (٢) – أجريت دراسة ميدانية للتعرف على حجم الاستهلاك على مستوى محافظتين من محافظات الجمهورية ، حيث جمعت بيانات العينتـــين ، وكانـــت النتائج كالتالي :

$n_1 = 60 \qquad \bar{X}_1 = L.E\ 190 \qquad S_1^2 = 720$

$n_2 = 90 \qquad \bar{X}_2 = L.E\ 160 \qquad S_2^2 = 960$

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين مستوى الاستهلاك في المحافظتين وذلـــك عند مستوى معنوية ٥% .

الحــــــل :

فرض العــــــــدم : $H_o : M_1 = M_2$

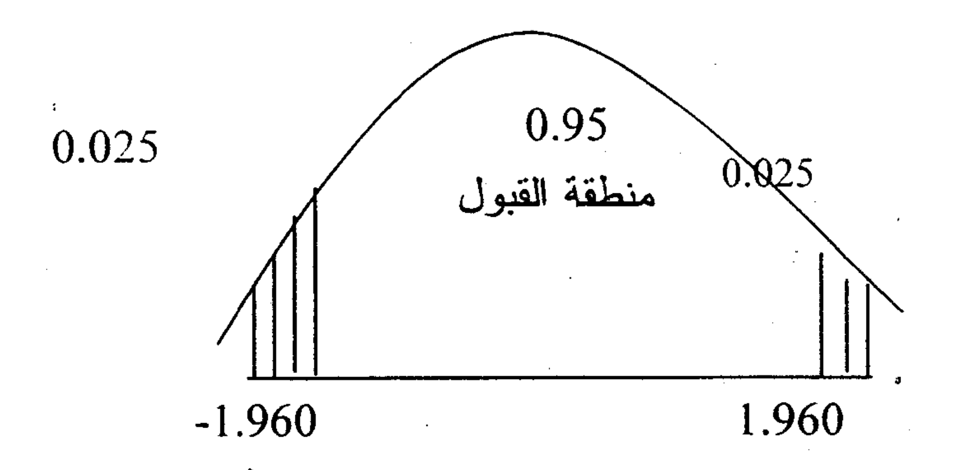
الفرض البديـــــــل : $H_a : M_1 \neq M_2$

وحيث أن حجم العينتين كبيراً ، فإننا نستخدم الاختبار التالي :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{190 - 160}{\sqrt{\frac{720}{60} + \frac{960}{90}}}$$

$$Z = \frac{30}{\sqrt{12 + 10.667}} = \frac{30}{4.761} = \boxed{6.301}$$



وحيث أن Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، ومن ثم نقبل الفرض البديل القائل بأن مستوى الاستهلاك الشهري مختلف بين المحافظتين موضوع الدراسة.

مثال (٣) : أجريت دراسة لقياس مستوى الذكاء بين طلاب جامعتي القاهرة وعين شمس ، حيث أخذت عينة عشوائية من طلاب جامعة القاهرة حجمها ٢٠ طالباً وكان متوسط درجات اختبار الذكاء = ١٨٠ والانحراف المعياري للعينة = ١٠ . كما أخذت عينة عشوائية من ٢٥ طالباً من جامعة عين شمس ، وكان متوسط درجات اختبار الذكاء = ١٤٠ والانحراف المعياري = ١٥٠ والمطلوب اختبار معنوية الفرق في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين عند مستوى معنوي ٠.٥ر ، علماً بأن تباين المجتمعين متساويان .

الحل :

$n_1 = 20 \qquad \overline{X}_1 = 180 \qquad S_1^2 = 100$

$n_2 = 25 \qquad \overline{X}_2 = 140 \qquad S_2^2 = 225$

$H_o : M_1 = M_2$: فرض العـــــدم

$H_a : M_1 \neq M_2$: الفرض البديـــــل

وحيث أن حجم العينتين صغيرا نسبياً ، فإننا نستخدم الاختبار التالي :

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} \quad \frac{1}{n_2}}}$$

وحيث أن تباين المجتمعين متساويان : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

فإننا نقوم بحساب التباين المشترك $(S^2{}_P)$ على النحو التالي :

$$S^2{}_p = \frac{(n1 - 1) \quad S_1^2 + (n2 - 1) \quad S_2^2}{20 + 25 - 2}$$

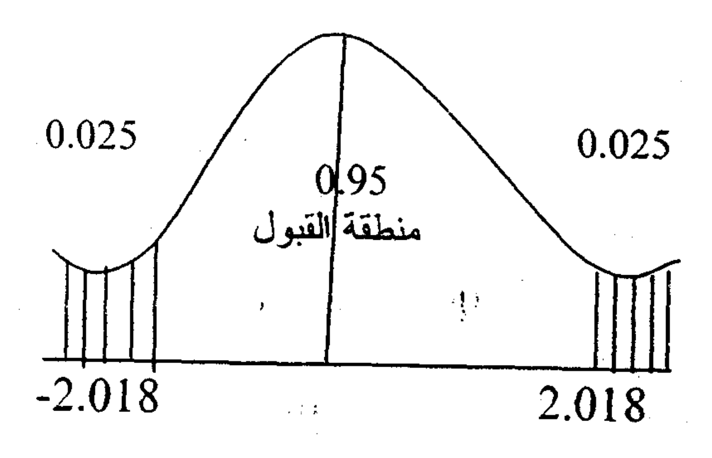
$$S^2{}_P = \frac{(20 - 1)\,100 + (25 - 1)\,225}{20 + 25 - 2}$$

$$S^2_P = \frac{1900 + 5400}{43} = \boxed{169.767}$$

$$T = \frac{180 - 140}{13.029\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}}}$$

$$= \frac{40}{13.029\sqrt{0.05 + 0.04}}$$

$$T = \frac{40}{13.029\,(0.3)} = \frac{40}{3.909} = \boxed{10.233}$$



وباستخدام توزيع T عند مستوى معنوية ٠٫٠٥ ودرجة حرية ٤٣ ، فإن منطقة القبول هي (2.018, 2.018-) .

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض ، أي نرفض فـرض العـدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن هناك فرقاً معنوياً في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين .

مثال (٤) : استعن ببيانات المثال السابق في اختبار معنوية الفرق في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين في حالـة عـدم تسـاوى تبـاين المجتمعين .

الحـــل :

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$T = \frac{180 - 140}{\sqrt{\frac{100}{20} + \frac{225}{25}}} = \frac{40}{5 + 9} = \frac{40}{14}$$

$$T = \frac{40}{3.742} = \boxed{10.689}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع T بدرجة حرية (n) بافتراض صحة فرض العدم ، حيث :

$$n = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$n = \frac{\left(\frac{100}{20} + \frac{225}{25}\right)^2}{\frac{(100/20)^2}{19} + \frac{(225/25)^2}{24}}$$

$$n = \frac{(5+9)}{\frac{25}{19} + \frac{81}{24}} = \frac{196}{1.315 + 3.375} = \frac{196}{4.69}$$

$$n = 41.79 \qquad = 42$$

وباستخدام توزيع t عند مستوى المعنوية ٠٥ر ودرجة حرية ٤٣ ، نجد أن منطقة القبول هي (2.019 , 2.019-) . وحيث أن قيمة T المحسوبة (10.689) تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن هناك فرقاً معنوياً في مستوى الذكاء بين طلاب الجامعتين .

ب – حالة العينات غير المستقلة :

لقد تناولنا اختبارات الفروض للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة ما إذا كانت العينات المسحوبة مستقلة تماماً عن بعضها ، ولكننا نجد في الحياة العملية أن العينتين المسحوبتين غير مستقلة ، بمعنى أن مفرداتهما تكون على شكل أزواج متناظرة (X, Y) ففي بعض الحالات قد تخضع المفردة (X i) لمعاملة معينة ، مع رصد قيمتها قبل المعاملة وقيمتها بعد المعاملة (yi) وبذلك نحصل على زوج القيم المتناظرة (X_1 ،Y_1) . ومن الواضح عدم استقلالية القيمتين المتناظرتين ، حيث أخذت كلتاهما في نفس المفردة ، غير أن القراءات المأخوذة من الأزواج المختلفة مستقلة عن بعضها .

ولإجراء اختبار الفروض في هذه الحالة يتم أخذ الفرق بين قيم المتغير (X) وقيم المتغير (Y) ولنطلق على الناتج المتغير (D) أي أن :

$$D = X - Y$$

وتكون القيمة المشاهدة للمتغير (D) هي : $d_i = X_i - Y_i$

حيث : $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

وعلى ذلك يكون لدينا متغير عشوائي (D) يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $M_D = M_1 - M_2$ وتباين σ_D^2 (غير معلوم) .

ويكون فرض العدم لهذا الاختبار : $H_0 = M_1 - M_2 = 0$

ويستخدم اختبار T الذي سبق تطبيقه ، مع افتراض صحة فرض العدم ، والذي يعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

حيث $(\bar{d})$ هو الوسط الحسابي للفرق

S_d = الانحراف المعياري للفروق ويحسب من العينة وعند مستوى معنوية ما لا نهاية تكون القرارات على النحو التالي :

- إذا كان : $H_o : \mu_1 \neq \mu_2$ إذا كانت $|T_c| \geq t\,(n-1, \frac{x}{2})$
- إذا كان : $Ha : M_1 > M^2$ فإننا نرفق Ho إذا كانت $T_c \geq -t\,(n-1,...)$
- إذا كان: $Ha : M_1 < M_2$ فإننا نرفض Ho إذا كانت $Tc < -t\,(n, 1, ...$

ويسمى اختبار t في هذه الحالة باختبار t للبيانات المتناظرة Paired data

مثال (١) :

أجريت تجربة لمقارنة صنفين من أصناف القمح ، حيث تم زراعتهما في ثماني مناطق ، اختيرت قطعتان متساويتان على مستوى كل منطقة ، زرعت أحداها بالصنف (A) والأخرى بالصنف (B) ، وفيما يلي بيانات الإنتاجية الفدانية بالأردب :

Blok	1	2	3	4	5	6	7	8
Var. A X	17	16	15	18	18.5	19	19.5	20
Var.B Y	16	15.5	14	16.5	17	17.5	18	18

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين إنتاجية الصـــنفين علـــى

مستوى 05 ,

الحـــــل :

بافتراض أن متوسط إنتاجية الصنف (A) = M_1

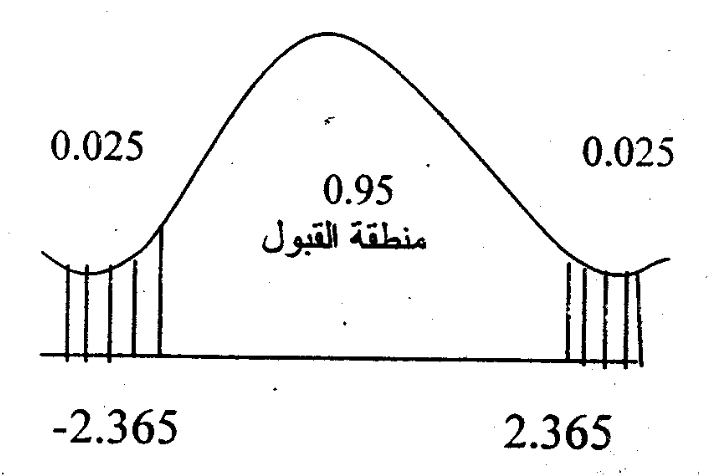
وان متوسط إنتاجية الصنف (B) = M_2

فإن فرض العدم : $H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_o : \mu_D = 0$

الفرض البديل : $H_a : \mu 1 - \mu 2 \neq 0$

$H_a : \mu_D \neq 0$



ونتناول فيما يلي خطوات تقدير اختبار T :

í	Xí	Yí	dí=xí-yí	d^2 í
1	17	16	1.0	1.00
2	16	15.5	0.5	0.25
3	15	14	1.0	1.00
4	18	16.5	1.5	2.25
5	18.5	17	1.5	2.25
6	19	17.5	1.5	2.25
7	19.5	18	105	2,25
8	20	18	2.0	4.00
Total			10.5	15.25

$$\bar{d} = \frac{di \ \Sigma}{n} = \frac{10.5}{8} = 1.313$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2 - \frac{(\Sigma \ di)^2}{n}}{n-1}}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{15.25 - \frac{(10.5)^2}{8}}{7}} = \sqrt{\frac{1.469}{7}} = 0.458$$

$$T_c = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}}$$

$$T_c = \frac{1.313}{0.458/\sqrt{8}}$$

$$T_c = \frac{1.313}{0.458/2.828} = \frac{1.313}{0.162} = 8.105$$

ومن الواضح أن قيمة T تقع في منطقة الرفض ، لذا فإننا نرفض Ho ونقبل الفرض البديل ، بمعنى أن هناك فرقاً معنوياً بين إنتاجية الصنفين ، وأن الصنف (B) يتفوق معنوياً على الصنف (A) وفقاً لمعيار الإنتاجية .

مثال (٢) :

الجدول التالي يبين درجات مادتي الإحصاء والرياضة لعشر طلاب :

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
درجة الإحصاء "X"	80	70	90	92	75	56	80	65	92	72
درجة الرياضة "Y"	70	80	80	84	85	60	70	72	85	70

والمطلوب اختبار معنوية الفرق بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضة عند مستوى معنوية 05 ,

بافتراض أن كلا من مادتي الإحصاء والرياضة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط M_1, M_2 على التوالي فإن :

فرض العدم : $H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0$

الفرض البديل : $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

من الواضح من المثال أن درجة الإحصاء غير مستقلة عن درجـــة الرياضـــة لنفس الطالب ، لذا فإننا نستخدم اختبار T للبيانات المتناظرة ويكون الاختبـــار الإحصائي هـــــو :

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d \,|\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

وفيما يلي خطوات إجراء الاختبار :

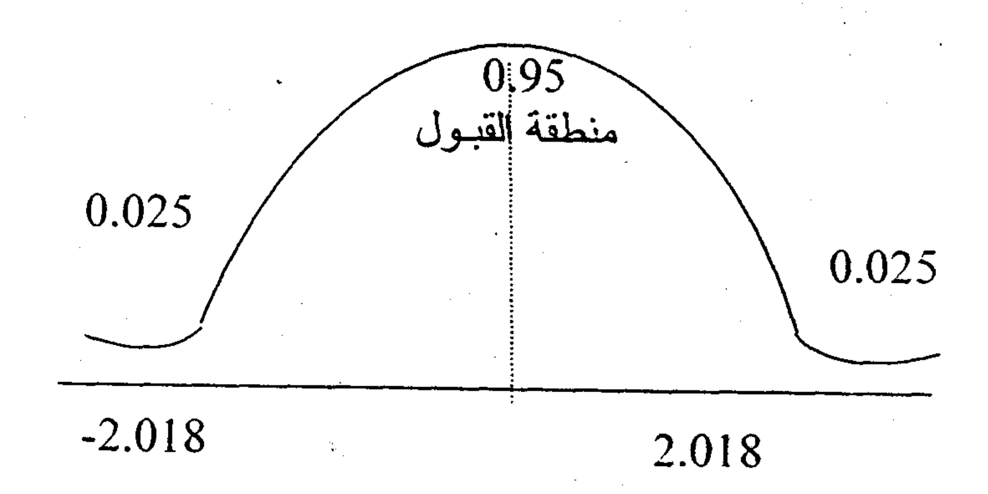
No.	Xi	Yi	di	Di²
1	80	70	10	100
2	70	80	- 10	100
3	90	80	10	100
4	92	84	8	64
5	75	85	-10	100
6	56	60	- 4	16
7	80	70	10	100
8	65	72	-7	49
9	92	85	7	49
10	72	70	2	4
Total			Σ di = 16	

$$\bar{d} = \frac{16}{6} = \boxed{1.6}$$

$$S_d = \frac{\sqrt{682 - \frac{(16)^2}{10}}}{9}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{682 - 25.6}{9}} = \boxed{8.54}$$

$$Tc = \frac{1.6}{8.54/\sqrt{10}} = \frac{1.6}{8.54/30162} = \frac{1.6}{2.7} = \boxed{0.593}$$



حيث أن قيمة T المحسوبة تقع في منطقة القبول ، ولذا فإنه لا يمكـــن رفـــض النظرية الفرضية (فرض العدم) عند مستوى معنوية ٠٥ر ، بمعنى أنه لا يوجد فرق معنوي بين متوسطات درجات الطلاب في الإحصاء ومتوسط درجاتهم في الرياضة .

الفصل السادس

تقدير العلاقات الاقتصادية باستخدام النماذج المركبة

تعتبر العلاقة الاقتصادية جزءاً من نموذج يشتمل على مجموعة من العلاقات الأخرى ، وتشكل هذه العلاقات مجتمعة نظاماً واحداً متكاملاً يعطينا نموذجاً مركباً من المعادلات التي تعبر عن تلك العلاقات . فعلاقة الطلب هي جزء من نموذج مركب يشتمل على الطلب والعرض والتوازن ومعادلة الاستهلاك هي جزء من نموذج مركب يشتمل على الاستهلاك ، والاستثمار والتوازن بين الطلب الكلي والعرض الكلي ، وهكذا .

وفي ضوء ذلك فإننا نحاول في هذا الفصل بحث مشكلة العلاقات التبادلية بين المعادلات ، التي تصور العلاقات الاقتصادية ، في نموذج مركب ، يتكون من مجموعة من المعادلات . وسوف نلاحظ ، أن الطريقة التي يتم من خلالها تقدير العلاقات الاقتصادية ، بمعزل عن بقية العلاقات ، لا تعطينا تقديراً غير متحيز ، كما أنها لا تعطينا تقديراً متوافقاً (Consistent) . ويعني ذلك أنه لابد من تعديل الطريقة التي تستخدم في عملية التقدير .

المعادلات الآنية (Simultaneous Equations)

لاحظنا في دراستنا لنموذج الانحدار الذي يتكون من معادلة واحدة ، كما هو الحال في النموذج التالي الاعتماد على مجموعة من الفروض :

$$y = b_o + b_1 x_1 + u_1 \qquad (A)$$

ويمكن أعطاء الفروض الأساسية في الآتـــــي :

(1)	$E(u_t) = 0$	$t = 1,2,3,....n$
(2)	$E(u_t x_t) = 0$	$t = 1,2,3,....n$
(3)	$E(u_t^2) = \sigma_u^2$	$t = 1,2,3,....n$
(4)	$E(U_t U_s) = 0$	$t \neq S$
(5)	$\sum (x_t - \overline{x})^2 \neq 0$	

ونلاحظ أنه إذا صدق الفرض الأول والثاني ، فإن تقديرنا في هـــذه الحالـــة ، تقديراً غير متحيز .

ولقد رأينا أن نقص الفرض الثاني ، بحيث يكون

$$E(U_t X_t) > 0$$

وهذا يعني أن القيم التي تكون من متوسط قيم (U_t) سوف يصاحبها قيم أكبـــر من المتوسط بالنسبة لقيمة (x_t) . والعكس صحيح ، ويؤدي ذلك إلى أن تكـــون القيم المقدرة للمتغير أكبر من المتوسط الحقيقي عندما تكون قيمة (x) أكبر من المتوسط . والعكس صحيح . ونحصل نتيجة لذلك على تقدير أقل مـــن القيمـــة الحقيقة بالنسبة للمعامل (b_o) ، وأكبر من القيمة الحقيقية بالنسبة للمعامل (b_1) وذلك لأن هذا التقدير يكون متحيزاً نحو الأسفل بالنسبة لقيمـــة (b_o) ، ونحـــو

الأعلى بالنسبة لقيمة (b_1) ، كما أن هذا التقدير لا يكون متوافقاً . فمهمـــا زاد حجم العينة لن نقترب من القيم الحقيقية .

ولنفرض أن المعادلة السابقة هي معادلة الاستهلاك حيث أن (y_t) تعبر عن الاستهلاك ، (x_t) تعبر عن الدخل ، وأن هذه المعادلة هي جزء من نموذج مركب من معادلتين وهو كما يلي :

$$Y_t = b_0 + b_t \ x_t + u_t \qquad (A-1)$$
$$X_t = Y_t + Z_t \qquad (A-2)$$

حيث أن (Z_t) هنا تعبر عن الاستثمار ، كما نرى في نظرية الاقتصاد الكلي ، ولنفرض أن (U_t) ترضي الفروض جميعها ما عدا الفرض الثاني ، فـــنحن لا نعلم مدى صدقه من عدمه .

ويصور لنا النموذج المركب من المعادلتين (A-1) و (A – 2) وضعاً يكـــون فيه الاستهلاك (Y_t) متغيراً تابعاً لتغير الدخل ، ويكون فيه الدخل تابعاً لتغيـــر الاستهلاك ، والاستثمار ، حيث أن قيمة (Z_t) تتحدد خارج النموذج ، فالمتغير (z) هو متغير خارجي (Exogenous Variable) . فالنموذج يفترض هنـــا توازناً بين الدخل والإنفاق ، وينقسم الإنفاق إلـــى إنفـــاق اســـتثماري وإنفـــاق استهلاكي ، بحيث يكون الإنتاج الكلي مساوياً للطلب الكلي .

ولنفترض أن (Z_t) مستقلة عن (U_t) بحيث تكون $E\ (U_t\ Z_t)$ مســـاوية للصفر . وأنه يمكن إعطاء قيمة (X_t) بالكيفية التالية :

$$(A\text{-}3)\quad X_t = \frac{b_o}{1 - b_t} + \frac{Z_t}{1 - b_t} + \frac{U_t}{1 - b_t}$$

نلاحظ هنا أن :

$$E(U_t X_t) = \frac{b_o}{1 - b_t} E(Z_t U_t) + \frac{E(z_t U_t)}{1 - b_t} \cdot \frac{E(U^2_t)}{1 - b_t}$$

إذاً

$$(A\text{-}4)\quad E(U_t X_t) = \frac{\sigma\ u}{1 - b_t} \neq o$$

ويرجع السبب في ذلك إلى وجود العلاقة المتبادلة بين (Y_t) و (X_t) ففي الوقت الذي تؤثر فيه قيمة (X_t) على (Y_t) ، تؤثر قيمة (Y_t) على (X_t) هي الأخرى . وهذا التأثير المتبادل هو الذي عقد الوضع وخلق المشكلة بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلال معامل الإزعاج عن المتغير المستقل غير صادق .

طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TSLS) .

لقد اقترحت عدة حلول لمعالجة المشكلة . وكان من بين هذه الحلول ما يسمى بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (Two Stage Least Squares) . وهذه الطريقة وإن كانت لا تعطينا تقديرات غير متحيزة ، فإنها تعطينا تقديرات متوافقة (Consistent) . ويعني ذلك أن الاعتماد على عينة

ذات حجم كبير نسبياً يؤدي إلى إيجاد تقديرات جيدة . وتتلخص هذه الطريقة في الخطوتين التاليتين :

أولاً : **تطهير المتغير المستقل** ، وفصله عن ذلك الجزء الذي يرتبط بمعامل الإزعاج .

ثانياً : **استخدام القيم الجديدة** ، التي توصلنا إليها بعد فصل الجزء الذي يرتبط بمعامل الإزعاج ، بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في إيجاد التقديرات .

وحتى يمكننا رؤية الكيفية التي تطبق بها هذه الطريقة نستخدم النموذج الذي صورناه بالمعادلتين (A-1) و (A-2) ولنفرض أنه يمكن وضع النموذج بالكيفية التالية :

$$(A-1) \qquad y_t = b_o + bx_t + U_t$$

$$(A-3) \qquad X_t = A_0 + A_t Z_t + V_t$$

حيث أن :

$$a_0 = \frac{b_0}{1 - b_t}$$

$$a_1 = \frac{1}{1 - b_t}$$

$$V_t = \frac{U_t}{1 - b_t}$$

ونلاحظ هنا أن $E(V_t)$ $E(u_t z_t) = 0$, وبالتالي يكون متوسط قيم (X_1) هــو :

$$x^m_t = a_0 + a_1 z_t \qquad (A\text{-}4)$$

ويكون :

$$x_t = x^m_t + v_t \qquad (A\text{-}5)$$

ولنفرض أن القيمتين : (a_0,a_1) معلومتان ، ولنعوض قيمة (x_t) في المعادلــة (A-1) ، لنحصل على ما يلي :

$$Y_t = b_0 + b_t x^m_t + b_t v_t + u_t \qquad (A-6)$$

حيث أن :

$$V_t = \frac{U_t}{1 - b_t}$$

فإن :

$$V_t = b_t V_t + U_t$$

وبذلك تكون :

$$Y_t = b_0 + b_t x^n_t + v_t \qquad (A\text{-}7)$$

وهذه الصيغة ، على خلاف الصيغة الأولى (A – 1) ترضي كافة الشـــروط ، وذلك لأن :

$$E(v_t) = 0$$

$$E(V_t X^m_t) = 0$$

لأن :

$$\text{(A-4)} \qquad X^m = a_0 + a_t z_t$$

ونستطيع الاعتماد على الشرطين :

$$\hat{v}_t = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma \hat{v} x^m_t \qquad (2)$$

لإيجاد المعادلات التالية :

$$\text{(A-8)} \quad \Sigma Y_1 = \hat{b}_t n + \hat{b}_t \Sigma x^m_t$$

$$\text{(A-9)} \quad \Sigma Y_t X_t = b_0 \Sigma x \Sigma + b_1 \Sigma (x^m_t)^2$$

وإيجاد تقديراتنا بالكيفية التالية :

$$\text{(A-10)} \quad \hat{b}_t = \frac{\Sigma (x^m_t - \overline{x}m) y_t}{\Sigma (x^m_t - \overline{x}m)^2}$$

$$\text{(A-11)} \quad \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}_1 \overline{x}^m$$

ويتضح من ذلك أنه لإيجاد تقديرات كل من (b_0) و (b_t) لابد من إتباع ما يلي :

أولاً : إيجاد متوسط قيم (X_t) وهو (X_t^m) التي لها علاقة بالمتغير (Z_t).

ثانياً : استخدام قيمة (X_t^m) بدلاً من قيمة (X_t) لإيجاد التقديرات المطلوبة.

وحيث أن (a_0 , a_t) غير معلومتين ، فإنه لا بد من تقديرهما ، بحيث نحصل على $(\hat{a}_0 , \hat{a}_t)$ ، ونوجد طريقهما قيمة (X_t) التي نستخدمها بدلاً من (X_t) في تقدير كل من (b_0) و (b_t) ، وبذلك نحصل على التقديرات التالية :

$$(A-12) \qquad \hat{b}_t = \frac{\Sigma(\hat{X}_t - \bar{X})\, Y_t}{\Sigma(\hat{X}_t - \bar{X})^2}$$

$$(A-13) \qquad \hat{b}_0 = \hat{Y} - \hat{b}_t \bar{x}$$

بعض النتائج الإضافية :

بعد الحصول على تقدير متوافق لقيمتي (b_0 , b_t) يمكن إعطاء تقدير معامل الإزعاج على النحو التالي :

$$(A-14) \qquad \hat{V}_t = Y_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_t x_t$$

وبذلك يمكن إيجاد تقدير للتباين (σ_v^2) على النحو التالي :

$$(A\text{-}15)\quad \hat{\sigma}_v^2 \quad \frac{\Sigma\ V_t^2}{n-2}$$

ويمكن استخدام المعادلة (A – 13) للحصول على تباين (bo) كما يلي:

$$(A-16) = \operatorname{var}(\hat{b}o) = \frac{\sigma\hat{v}^2\ \Sigma\ \hat{X}_t^2}{n\ \Sigma\ (\hat{x}_t-\bar{x})^2}$$

ويمكن ، بذلك ، استخدام هذه التقديرات في اختبار الفروض ، ولكن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين لا يمكن تطبيقها إلا إذا كان النموذج المراد تقديره معرفاً (Identified) ويتوقف كون النموذج معرفاً على عدد المتغيرات التي حددت مسبقاً (Predetermined Variables) .

المتغيرات التي تحدد مسبقاً :

يوجد نوعان من المتغيرات التي تحدد مسبقاً :

النوع الأول : ويطلق عليه اصطلاح المتغيرات الخارجية (Exogenous Variables) ، وهي عبارة عن متغيرات تتحدد قيمها خارج النموذج .

النوع الثاني : وهي عبارة عن متغيرات داخلية مختلفة (Lagged Variables) ، وتحدد قيمها داخل النموذج بطريقة منتظمة .

مثال : لنفرض أن النموذج الذي نريد تطبيقه هو على النحو التالي :

$$(B-1)\qquad Y_t \qquad = b_0 + b_1\, x_1 + b_2\, x_{t-1} + U_t$$

$$(B-2) \quad x_t = Y_t + Z_t$$

حيث أن (X_t) تعبر عن الدخل ، (Y_t) تعبر عن الاستهلاك ، (z_t) تعبر عن الاستثمار ، وقيمة هذا المتغير تتحدد خارج النموذج . وبذلك نلاحظ أنه لدينا متغيرين تتحدد قيم كل منهما مسبقاً : المتغير الأول هو (X_{t-1}) وهو عبارة عن قيمة (X) في السنة السابقة ، والمتغير الثاني هو (Z_t) وهو متغير خارجي لأن قيمته تتحدد خارج النموذج .

الشكل الأساسي والشكل المحول :

$$(A-1) \quad Y_t = b_0 + b_1 x_t + U_t$$

$$(A-2) \quad X_t = Y_t + Z_t$$

وهو أصل النموذج المركب . هذا الشكل يطلق عليه اصطلاح الشكل الأساسي (Structural Form) لأنه الأساس الذي نؤسس عليه تقديراتنا . ويمكن استخدام هذا الشكل وتحويله إلى شكل آخر ، كما رأينا عندما أردنا فصل الأثر المتبادل بين (X_t) و (U_t) للحصول على :

$$(B-3) \quad Y_t = b_0 + b_t X^m_t + v_t$$

$$(B-4) \quad X^m_t = a_0 + a_t z_t + v_t$$

حيث أن $X^m_t = a_0 + a_1 z_t$ تعطينا ما يلي :

$$(B-5) \quad Y_t = (b_o + b_t a_t) + b_t a_0 z_t + v_t$$

$$(B-6) \quad X_t = a_0 + a1 Z_t + v_t$$

وبصورة أخرى

$$(B\text{-}7) \qquad Y_t = \frac{b_0}{1-b_t} + \frac{b_t}{1-b_t} Z_t + v_t$$

$$(B\text{-}8) \qquad X_t = \frac{b_0}{1-b_t} + \frac{b_t}{1-b_t} + z_t - v_t$$

وهذا الشكل الذي صوزناه بالمعادلتين (b – 7) و (B-8) يطلق عليه اصطلاح الشكل المحول (Reduced Form) ونستطيع كتابته كما يلي :

$$(B\text{-}7) \qquad Y_t = B_0 + B_t z_1 + V_t$$

$$(B\text{-}8) \qquad xt = a_0 + a_1 z_1 + v_t$$

حيث أن :

$$B_0 = \frac{b_o}{1-b_t} \qquad B_1 = \frac{b_o}{1-b_t}$$

ونلاحظ من خلال ذلك أن قيمة كل من (Y_t) و (X_t) تتحدد عن طريق المتغير الخارجي (z_t) . وأن $E\ (z_t\ v_t)$ يساوي صفراً ، وبذلك يمكن تقدير المعادلتين (B-7) و (B-8) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية ، ولكن الصعوبة تكمن في كيفية الرجوع من الشكل المحول إلى الشكل الأصلي .

مشكلة التعرف (Identification Problem) :

ذكرنا بأن التقديرات التي توفرهـا طريقـة المربعـات الصـغرى ذات المرحلتين هي تقديرات متوافقة . ولكن هناك بعض الحالات التي لا يمكن فيها استخدام هذه الطريقة . فلنفرض مثلاً أن النموذج الذي نريد تقديره يتكون مـن المعادلات الآتية :

$$(C-1) \qquad Q_t^d = a_0 + a_t\, p_t + U_t$$

$$(C-2) \qquad Q_t^s = B_0 + B_t\, P_t + E_t$$

$$(C-3) \qquad Q_t^d = Q_t^S$$

حيث أن :

Q_t^d = الكميات المطلوبة من (Qt)

Q_t^s = الكميات المعروضة من (Qt)

P_t = الأسعار الخاصة بالسلعة Qt

وأن ثوابت المعادلات السابقة هي : $(a_0,\ a_t,\ B_0,\ B_t)$.

ولنفرض أننا نريد تقدير معادلة الطلب (C-1) نلاحظ بأن (U_t) غير مستقل عن (Pt) وذلك لأن $(Q_t^d = Q_t^s)$ كما هو في المعادلة (C – 3) ويعني ذلك أن :

$$a_0 + a_t\ p_t + U_t = B_0 + b_t\ P_t + E_t$$

وبذلك تكون قيمة (p_t) كما يلي :

$$(C-4) \qquad P_t = \frac{a0 - B0}{B_t - a_t} + \frac{U_t - E_t}{B_t - a_t}$$

وتكون :

$$E(P_t U_t) \neq 0$$

ويعني ذلك أن (U_t) يكون مرتبطاً مع (P_t) . وتوجد مشكلة نتيجة لذلك . وإذا حاولنا استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في هذه الحالة ، فإننا نبدأ بتقدير قيمة المتغير المستقل (p_t) . ولكن (p_t) في شكله المحول لا يعتمد على متغيرات محدودة مسبقاً (Predetermined) . ويتعذر لذلك تطبيق هذه الطريقة لتقدير دالة الطلب . وإذا ما أردنا تقدير دالة العرض ، فإننا نصل إلى نفس النتيجة . وهذه المشكلة هي مشكلة تتعلق بوصف النموذج (Specification Problem) . ويعتبر البناء الذي يتكون منه النموذج مسؤولاً عن هذه المشكلة .

مثال : لنفرض أن معادلة الطلب في النموذج السابق هي كالآتي :

$$(A) \qquad Q_t^d = B_0 + B_t p_t + B_2 Y_t + u_t$$

وأن معادلة العرض هي

$$(B1) \qquad Q_t^s = a_0 + a_t p_t + E_t$$

$$(B2) \qquad Q_t^d = Q_t^S$$

بحيث يمكن إيجاد تقدير (p_t) كما يلي :

$$(C\text{-}1) \qquad \hat{p}_t = \hat{C}_0 + \hat{C}_t \; Y_t$$

حيث أن دخل المستهلك = (Y_t) ، فإننا نلاحظ في هذه الحالة أيضاً أن هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرين : (Y_t) و (P_t) وبذلك يتعذر تطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين ، لإيجاد معادلة الطلب.

وإذا قارنا بين معادلة الطلب ومعادلة العرض ، فإننا نجد أن هذه المعادلة خالية من وجود المتغير (Y_t) ، ولذلك يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في تقدير هذه المعادلة ، حيث يمكن وضع هذه المعادلة في الصورة التالية :

$$(C\text{-}2) \quad Q_t^s = a_0 + a_t \hat{P}_t + E_t$$

ونلاحظ هنا عدم وجود المتغير (Y_t) الذي يرتبط خطياً ارتباطاً كاملاً مع $(\hat{P}_t)$ ، ولذلك يمكن تقدير هذه المعادلة باستخدام قيمة $(\hat{P}_t)$ ، بدلاً من (P_t) .

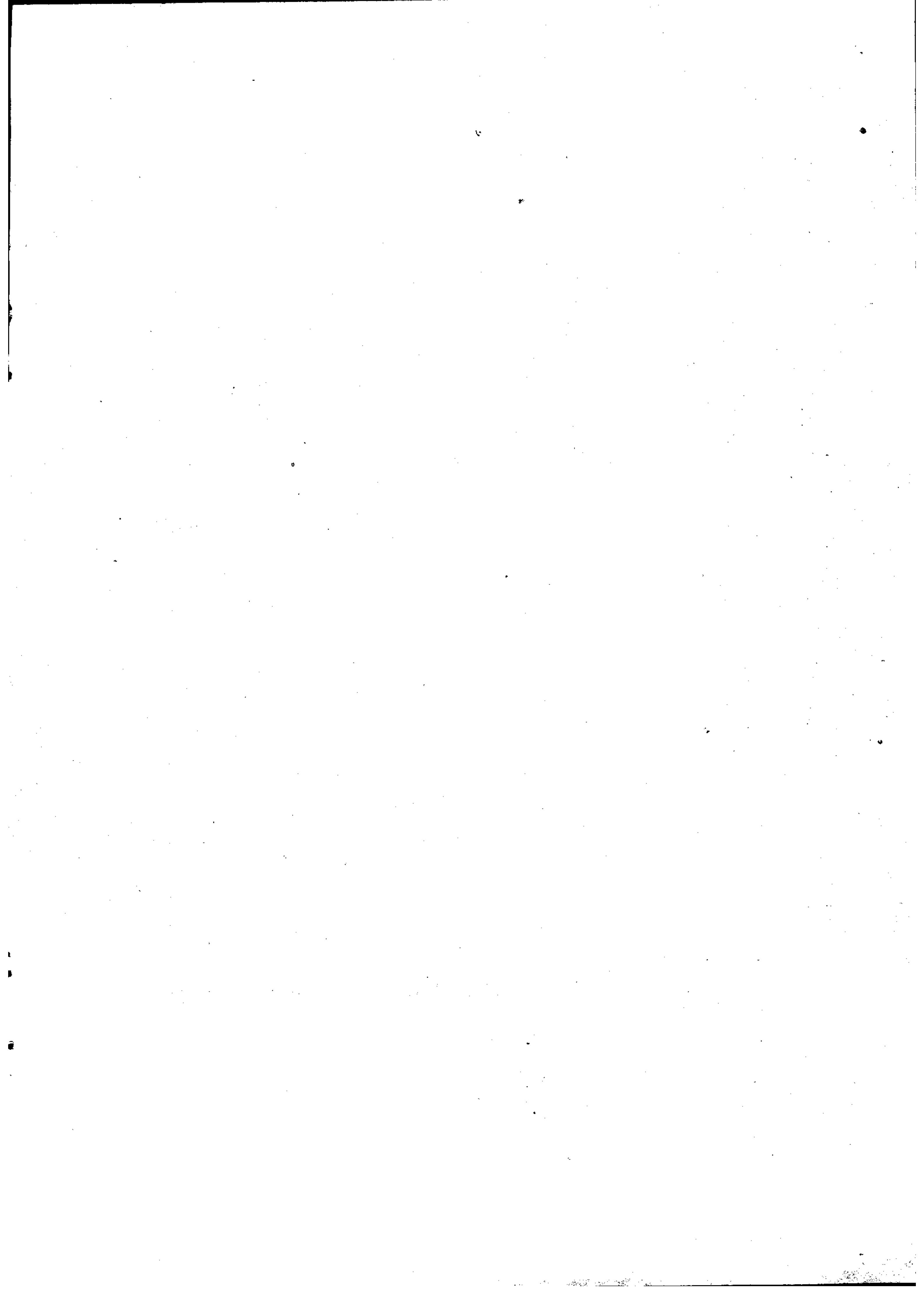
ونلاحظ ، بالإضافة إلى ذلك ، أن معادلة الطلب تحتوي على عدد من المتغيرات المستقلة (الداخلية) أكبر من عدد المتغيرات (المحددة مسبقاً) التي تكون موجودة في النموذج ، ولا تكون موجودة في معادلة الطلب .

كما نلاحظ أن عدد المتغيرات المستقلة (الداخلية) يساوي عدد المتغيرات (المحددة مسبقاً) التي تكون موجودة في النموذج ولا تكون موجودة في معادلة العرض .

ولذلك كانت معادلة الطلب غير معرفة ، وكانت معادلة العرض معرفة ، وأمكن إيجاد تقدير لها بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين .

القسم الثاني

الاقتصاد الرياضي



الفصل الأول

التوازن الاقتصادي الجزئي

يمثل التوازن حالة من الثبات حيث تكون جميع القوى المؤثرة في حالة استاتيكية ولا يكون هناك ميل لهذه القوى في التغيير وإذا تغيرت هذه القوى أو إحداهما فإنه نقطة التوازن ستتغير إلى نقطة أخرى ، وينقسم التوازن من ناحية دراسته إلى :

(١) التوازن العام ويمثل حالة التوازن التي تكون فيها جميع الوحدات الاقتصادية في حالة توازن .

(٢) التوازن الجزئي ويمثل حالة التوازن التي تكون فيها الوحدة الاقتصادية في حالة توازن وتنقسم إلى :

أ- توازن المستهلك حيث يكون المستهلك في حالة توازن إذا كان المستهلك ينفق دخله في الصورة التالية :

$$\frac{(\text{م ح})_1}{\text{ع}_1} = \frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2} = \dots = \frac{(\text{م ح})_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}}}$$

ب- توازن المنشأة حيث تكون المنشأة في حالة توازن إذا كان عرضها النهائي هو معظمة الربح أي أن :

الإيراد الحدي = النفقة الحدية

(٣) توازن السوق : ويمثل التوازن الذي تكون فيه قوى الطلب مساوية لقوى العرض حيث يكون هناك سعر عند نقطة تلاقي قوى الطلب بقوى العرض.يطلق عليه سعر التوازن .

فإذا توفرت لدينا تلك العناصر يمكننا حساب الكميات التوازنية والأسعار التوازنية . فمثلاً إذا علمنا أن :

$$ك_{ط} = 50 - 7 س$$

$$ك_{ع} = 10 + 3 س$$

$$ك_{ط} = ك_{ع}$$

حيث ($ك_{ط}$) الكمية المطلوبة ، ($ك_{ع}$) الكمية المعروضة ، (س) سعر السلعة .

بالتعويض في شرط التوازن نجد أن :

$$50 - 7 س = 10 + 3 س$$

$$60 = 10 س$$

$$إذاً \ \bar{س} = \frac{60}{10} = 6$$

وبالتعويض في دالة الطلب أو دالة العرض نحصل على الكمية التوازنية

$$\bar{ك} = 8$$

ولإيضاح مفهوم التوازن ، لنفترض أن مستوى السعر السائد في السوق هو "7" نعوض في دالة العرض فنجد أن الكمية المعروضة هي "11" وحدة بينما بالتعويض في دالة الكمية المطلوبة نجد أن الكمية المطلوبة لن تتجاوز وحدة واحدة . وسوف تؤدي فائض الكمية المعروضة إلى الضغط على الأسعار إلى أسفل نحو السعر التوازني ، أي أنه عند نقطة بعيدة عن المستوى التوازني

ستوجد قوى تدفعنا نحو التوازن تلقائياً . ويحدث عكس ما سبق إذا كان السعر السائد في السوق أقل من السعر التوازني حيث تتجاوز الكمية المطلوبة عنده الكمية المعروضة من السلعة ومن ثم هناك قوى تضغط على السعر إلى أعلى في اتجاه القيمة التوازنية ، فالتوازن يعني اختفاء القوى التي تدفع نحو التغيير ويعني حدوث استقرار .

ويمكننا الوصول إلى الصورة العامة للتوازن في السوق على النحو التالي:

$$ك_{ط} = أ - ب س$$

$$ك_{ع} = جـ + د س$$

وبالتعويض في شرط التوازن :

$$أ - ب س = جـ + د س$$

$$إذا \ \bar{س} = \frac{أ - جـ}{ب + د}$$

ومن الواضح أنه للحصول على أسعار ذات مغزى اقتصادي يشترط أن تتجاوز قيمة المعامل (أ) قيمة المعامل (ج) .

وبالتعويض بالسعر التوازني في إحدى الدالتين ، ولتكن دالة الطلب نحصل على الكمية التوازنية .

$$\bar{ك} = أ - ب \left\{ \frac{أ - جـ}{ب + د} \right\}$$

$$= \frac{أب + أد - أب + ب ج}{ب + د}$$

$$= \frac{\text{أ د + ب جـ}}{\text{ب + د}}$$

ونلاحـــظ أن الكمية والسعر يعبر عنهما بقــيم المعــاملات الــواردة بالنموذج ، وهذا هو ما يسمى بحل النموذج .

وبالتعويض في هذه الصيغ بقيم المعاملات الواردة بالمثال السابق حيث كانت :

أ = 50 ، ب = 7 ، جـ = 10 ، د = 3

$$\bar{\text{س}} = \frac{50 - (-10)}{7 + 3} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\bar{\text{ك}} = \frac{150 - 70}{7 - 3} = \frac{80}{10} = 8$$

وهي نفس القيم التي حصلنا عليها باستخدام معادلـــة الطلـــب ومعادلـــة العرض .

٢ ـ٢ : تغيرات العرض والطلب

يؤدي تغير واحد من منحنى العرض أو منحنى الطلب إلـــى تغيـــر القيمة التوازنية . لنبدأ بتغير الطلب الأمر الذي يعني انتقال المنحنـــى بالكامل نتيجة لتغير العناصر الأخرى (غير السعر) التي تـــؤثر فـــي الكمية المطلوبة من السلعة محل الدراسة . فإذا تغير دخل المستهلك أو ذوقه تجاه استخدام السلعة وكذلك إذا تغيرت أســـعار الســـلع الأخـــرى

الوثيقة الصلة بالسلعة محل الدراسة ، فإن الطلب يتغير مما يعني انتقال منحنى الطلب إلى اليمين وهذا مانطلق عليه زيادة الطلب والعكس ، إذا انخفض دخل المستهلك مع بقاء الأشياء الأخرى على حالها فإن منحنى الطلب ينتقل إلى اليسار وينخفض الطلب . حيث نعلم من مبادئ الاقتصاد أن زيادة الطلب ، مع بقاء العرض على حاله ، يؤدى إلى زيادة كل من الكمية التوازنية والسعر التوازني ، ويؤدي انخفاض الطلب إلى انخفاض الكمية والسعر التوازني . بعبارة أخرى أنه عند تغير الطلب تتغير القيم التوازنية للكميات والأسعار في نفس اتجاه تغير الطلب فإذا زاد الطلب زادت تلك القيم بينما يؤدي انخفاض الطلب على انخفاض تلك القيم .

ويمكننا توضيح ذلك رياضياً بإدخال تغير طفيف على دالة الطلب ليوضح انتقالها من مكانها . وينعكس تغير الطلب في القيمة المعامل "أ" في دالة الطلب (حيث أن ذلك المعامل هو الذي يعكس تأثير العوامل الأخرى غير السعر على الكمية المطلوبة) أي أن تغير العوامل الأخرى سوف يغير من قيمة المعاملة "أ" بالزيادة في حالة زيادة الطلب أو بالنقصان في حالة انخفاض الطلب .

ولتوضيح أثر تغير الطلب وليكن أثر زيادة الطلب مثلاً نعود إلى مثالنا السابق حيث نزيد من قيمة المعامل "أ" في دالة الطلب ونبقى على الميل الحدى للدالة ثابتاً (أي لا نغير قيمة المعامل ب) ويعني ذلك انتقال دالة الطلب إلى اليمين موازية لنفسها فما هو أثر ذلك على القيم التوازنية ؟ .

$ك_{ط١} = 55 - 7$ س

$ك_{ع} = 10 + 3$ س

وبالتعويض في شرط التوازن نحصل على :

$55 - 7$ س $= 10 + 3$ س

$65 = 10$ س

إذاً $\bar{س}_{١} = 6.5$

أي أن السعر التوازني قد ارتفع من "6" إلى "6.5" نتيجة لزيادة الطلب على السلعة .

أما عن الكميات التوازنية الجديدة فنحصل عليها عن طريق التعويض في إحدى الدالتين (دالة الطلب الجديدة أو دالة العرض) ولتكن دالة العرض هذه المرة فنجد أن :

$ك_{1} = -10 + 3 (6.5)$

$= 9.5$

أي أن الكمية التوازنية ازدادت من "8" إلى "9.5" وحده .

أما عن حالة انخفاض الطلب فسوف تنعكس في انخفاض قيمة المعامل "أ" .

فمثلاً إذا تغيرت دالة الطلب إلى :

$ك_{ط٢} = 45 - 7$ س

$ك_{ع} = 10 + 3$ س

وبالتعويض في شرط التوازن نجد أن القيم التوازنية الجديدة هي :

$$\bar{س}_2 = 5.5$$

$$\bar{ك}_2 = 6.5$$

ويمكننا التعبير عن تغير الطلب بصورة عامة كالتالي :

$$ك_ط = (أ + \Delta أ) - ب س$$

$$ك_ع = جـ + د س$$

ويكون :

$$\bar{س}_1 = \frac{(أ + \Delta أ) - جـ}{ب + د}$$

$$\bar{ك}_1 = \frac{أ د \Delta أ د + ب جـ}{ب + د}$$

وتوضح هذه الصيغ أنه إذا زاد الطلب أي أن Δ أ > 0 فإن كل من السعر والكمية سوف يتزايد ، في حين أنه إذا انخفض الطلب أي أن Δ أ < 0 فإن القيم التوازنية ستنخفض .

ومن الجدير بالملاحظة أنه إذا طرحنا قيمة $\bar{س}$ من $\bar{س}_1$ نحصل على مقدار التغير في السعر التوازني المترتب على تغير الطلب أي أن :

$$\Delta س = \frac{\Delta أ}{ب + د}$$

وباستخدام نفس الأسلوب يمكننا الحصول على مقدار التغير في الكمية التوازنية وسنجد أنه

$$\Delta \text{ك} = \frac{\Delta \text{ أ د}}{\text{ب} + \text{د}}$$

وواضح وجود العلاقة الطردية بين اتجاه التغير في السعر أو الكمية والتغير في المعلمة "أ" .

أما عن تغير العرض فيعني انتقال منحنى العرض بكاملة نتيجة لتغير العناصر الأخرى التي تؤثر في الكميات المعروضة من السلعة محل الدراسة . ولعل أهم تلك العناصر تغير تكاليف الإنتاج حيث تؤدي زيادة تلك التكاليف إلى عدم استعداد المنتجين لعرض نفس الكميات عند مختلف الأسعار . بل غالبا ما تؤدي هذه الزيادة إلى تخفيض الكميات المستعد المنتج لعرضها عند سعر معين. وبعبارة أخرى أن زيادة تكاليف الإنتاج تؤدي إلى تخفيض العرض ونقل المنحنى أي منحنى العرض إلى اليسار . أما في حالة انخفاض تكاليف الإنتاج ينتقل منحنى العرض إلى اليسار . أما في حالة انخفاض تكاليف الإنتاج ينتقل منحنى العرض إلى اليمين ليوضح استعداد المنتج لعرض كمية أكبر من السلعة عند سعر معين . وكما نعلم من مبادئ الاقتصاد فإن نقص العرض ، مع بقاء الطلب على حالة ، يؤدي إلى ارتفاع السعر التوازني وانخفاض الكمية التوازنية . أما زيادة العرض فتؤدي إلى انخفاض السعر التوازني وإلى زيادة الكمية التوازنية . بعبارة أخرى يؤدي تغير العرض إلى تغير السعر التوازني في الاتجاه العكسي وإلى تغير الكمية التوازنية في نفس اتجاه تغير العرض .

وسوف ينعكس تقدير العرض رياضياً في تغير قيمة المعامل "ج" الوارد في دالة العرض وذلك لأنه يوضح تأثير العوامل الأخرى غير السعر على الكميات المعروضة . وعني زيادة العرض زيادة قيمة هذا المعامل والعكس في حالة نقص العرض . ولتوضيح ذلك نعود إلى مثالنا السابق حيث نبدأ بحالة زيادة العرض فنبقى على دالة الطلب على حالها هذه المرة نزيد من قيمة المعامل "جـ" لتوضيح زيادة العرض وانتقال منحنى العرض على اليمين فنجد أن :

$$ك_{ط} = 50 - 7 س$$

$$ك_{ع 1} = 5 + 3 س$$

وبالتعويض في شرط التوازن نحصل على القيم التوازنية الجديدة :

$$س_{1} = 5.5 \quad ، \quad ك1 = 11.5$$

أي أن السعر قد انخفض من "6" إلى "5.5" بينما زادت الكمية التوازنية من "8" إلى "11.5" عند زيادة العرض .

أما عن حالة انخفاض العرض فسوف تنعكس في انخفاض قيمة المعامل "ج" ، فمثلاً إذا بقيت دالة الطلب على حالها وتغيرت دالة العرض يصبح لدينا النموذج التالي :

$$ك_{ط} = 50 - 7 س$$

$$ك_{ع 1} = -15 + 3 س$$

وبالتعويض في شرط التوازن نحصل على القيم التوازنية الجديدة :

$$\bar{\text{س}} = 6.5 \quad ، \quad \bar{\text{ك}} = 4.5$$

وستكون القيم التوازنية عند التعريض في شرط التوازن هي :

$$\bar{\text{س}} = 6.5 \quad ، \quad \text{ك} = 4.5$$

أي أن انخفاض العرض أدى إلى انخفاض السعر وارتفاع الكمية التوازنية .

يمكننا كتابة الصورة العامة لتغير العرض كالتالي :

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{أ} - \text{ب س}$$

$$\text{ك}_{\text{ع}} = (\text{ج} + \Delta\, \text{ج}) + \text{د س}$$

ويكون :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{أ} - \text{ج} - \Delta\, \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$$

$$\bar{\text{ك}} = \frac{\text{أد} + \text{ب جـ} + \text{ب}\, \Delta\, \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$$

وتوضح هذه الصيغ أنه إذا زاد العرض أي أن Δ جـ > 0 فإن السعر التوازني ينخفض ، أما الكمية التوازنية فتزداد ، بينما انخفاض العرض أي أن Δ جـ < 0 فإن السعر التوازني يزداد بينما تنخفض الكمية التوازنية .

وذلك على النحو التالي :

$$\Delta\, \text{س} = \frac{-\Delta\, \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$$

$$\Delta \text{ ك} = \frac{\text{ب } \Delta \text{ جـ}}{\text{ب + د}}$$

مثال (١) :

إذا علمت أن دالة الطلب هـــى : $QD = 40 - 2\,P$

ودالة العرض هـــي : $2\,P - Q_S = 20$

فإذا فرض أن الحكومة فرضت ضريبة مقدارها (t) عن كل وحدة تعرض :

فأحسب :

أ- مقدار الضريبة التي تفرض على كل وحدة من السلعة وذلك حتـــى تكـــون حصيلة الضريبة أكبر ما يمكن .

ب- مقدار حصيلة الضريبة التي ستحصل عليها الحكومة .

الحـــــل :

أولاً : دالة العـــرض $Q_s = -20 + 2_p$

منحنى العرض بعد الضريبة :

$$Q_s = -20 + 2\,(p\text{-}t)$$

$$= 20 + (2\,P - 21)$$

أو $2p = Q_s + 20 + 2t$

ودالة الطلب هي $2p = 40 - QD$

عند التوازن $Qs = QD$

إذا $Q + 20 + 2t = 40 - Q$

$2Q = 40 - 20 - 2t$

$Q = 10 - t$

$T \quad 10 - Q$

وبالتالي $T = tQ - 10Q - Q2$

و (T) تعظم عندما $\frac{dT}{dQ2} = \frac{dt}{dQ^2} < 0$

وعندما $\frac{dT}{dQ} = 0$ فإن $\frac{dT}{da} = 10 - 2Q = 0$

وبالتالي $Q = 5$

وحيث أن $\frac{d^2t}{dQ^2} = -2 < 0$

فإن الكمية التي تعظم (T) هـــي $Q = 5$

وعندما $Q = 5$ فإن $5 = 10 - t$

إذاً $t = 5$

(t=5) هي الضريبة التي تعظم حصيلة (T)

ثانيا : حصيلة الضريبة هي : $t = t\,q$

$= 5 \times 5$

$= 25$

مثال (٢) : إذا كانت دالة الطلب هي $0.1Q - 10 + 0.2\,p + 0.02\,p^2 = 0$

فاحسب مقدار المرونة السعرية للطلب عند $P = 10$

الحـــل :

$$Q = 100 - 2\,p - 0.2\,p^2$$

عندما يكون $p = 10$

فإن :

$$Q = 100 - 2 \times 10 .\, 02\,(10)^2 = 60$$

$$\frac{d\,Q}{d\,p} = -\,2 - 0.4\,p$$

عند سعر = 10

فإن :

$$\frac{d\,Q}{d\,p} = -2 - 0.4 \times 10 = 6$$

$$\frac{d\,Q}{d\,p} \quad \frac{P}{q} = -6 \times \frac{10}{60} = -1$$

مثال (٣) : إذا علمت أن دالة الطلب هي $a\,q + b\,p - k = 0$

حيث (a) و (b) و (k) هي ثوابت موجبة . أثبت أن المرونة السعرية للطلب تكون (1-) عندما يكون الإيراد الحدي مساوياً للصفر $M\,R = 0$.

الحـــــل :

من دالة الطلب نصل إلى :
$$P = \frac{k}{B} - \frac{a}{b} Q$$

الإيراد الكلي
$$P \times Q$$

وبضرب معادلة (p) في الكمية (Q) نحصل على الإيراد الكلي (T R) .

$$T R = \left(\frac{K}{b} - \frac{a}{b} Q \right) Q = \frac{k}{b} Q - \frac{a}{b} Q^2$$

$$MR = \frac{d\,TR}{d\,Q} = \frac{K}{b} - \frac{2a}{b} Q$$

عندما يكون : (MR : 0)

$$\frac{K}{b} - \frac{2a}{b} Q = 0$$

$$\frac{2\,a}{B} Q = \frac{k}{b}$$

$$Q = \frac{K}{b} \times \frac{b}{2a} = \frac{k}{2a}$$

وعندما تكون

$$Q = \frac{K}{2a}$$

فإن :

$$P = \frac{K}{b} - \frac{(a)}{b} \quad \frac{(K)}{2a}$$

$$P = \frac{K}{2\,b}$$

$$n = \frac{dq}{d\,p} - \frac{p}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dp} = \frac{1}{dp / dQ} = \frac{1}{- a / b} = - \; b / a$$

$$n = \frac{-\,b}{a} \times \frac{k}{2b} \quad \frac{2a}{k} = -\,1$$

الفصل الثاني

تحليل التوازن الكلي

أولاً : نموذج مبسط لتحديد الدخــل

تتكون أبسط نماذج تحديد الدخل القومي من قطاعين ، القطاع الأول هو القطاع العائلي ، وعادة ما يوسف سلوك هذا القطاع باستخدام المعادلة التالية :

ك = أ + ب د ، حيث أ > 0 ، 0 < ب < 1

حيث "ك" هو حجم الإنفاق الاستهلاك ، "د" مستوى الــدخل "أ" الاستهلاك المستقل عن الدخل "ب" ميل الدالة وتوضح الميــل الحــدي للاستهلاك الذي يكون بين الصفر والواحد صحيح .

أما القطاع الثاني بالنموذج فهو قطاع الأعمال وسوف نفترض أن حجم إنفاق هذا القطاع ، أي الإنفاق الاســتثماري ، يتحــدد خــارج النموذج وسوف نصف سلوك هذا القطاع فيما يتعلق بتحديد حجم إنفاقــه باستخدام المعادلة التالية :

ث = ث ه

ويكتمل النموذج بإضافة شرط تحقيق التوازن في النموذج . يتمثل شرط التوازن في التساوي بين مجموع عناصر الإنفاق مع العرض الكلي ، يعبر عنه بالمعادلة :

د = ك + ث

النموذج الذي يصف لنا اقتصاد مبسط يتكون من المعادلات الثلاث التالية :

ك = أ + ب د

ث = ث ه

د = ك + ث

وللحصول على القيم التوازنية نعوض في شرط التوازن فنحصل على :

د = أ + ب د + ث ه

د – ب د = أ + ث ه

د (أ – ب) = أ + ث ه

أ + ث ه

إذاً د = (أ + ث ه) / (أ – ب)

وبالتعويض بهذه القيم في دالة الاستهلاك نحصل على حجم الإنفاق الاستهلاك التوازني :

ك = أ + ب ((أ + ث ه) / (أ – ب))

ك̄ = (أ + ب ث ه) / (أ – ب)

ونلاحظ أن تحديد القيم التوازنية (أي حل النموذج) يعني التعبير عـن المتغيرات الداخلية ، أي تلك التي تتحدد بتفاعل الدوال المكونة للنموذج ، بدلالة الثوابت الواردة بالنموذج أي معالم الدوال وكذلك بدلالة المتغيرات الخارجية . هذا وتسمى هذه الصورة (أي الصيغ التوازنية للمتغيرات بـالنموذج الداخليـة) باسم الصورة المختزلة أو المختصرة للنموذج .

مثال : أحسب القيم التوازنية للنموذج التالي :

ك = 100 + 0.08 د

ث = 200

د = ك + ث

الحــل : بالتعويض في شرط التوازن :

د = ك + ث

د = 100 + 0.80 د + 200

0.20 د = 300

إذاً د̄ = 1500

وبالتعويض في دالة الإنفاق الاستهلاكي نحصل على :

ك̄ = 100 + 0.80 (1500)

= 1300

وتجدر الإشارة على أنه يمكننا التعويض في الصورة المختزلة وتحديد التوازن بصورة مباشرة وبالرجوع إلى مثالنا هذا نجد أن :

أ = 100 ، ب = 0.80 ، ث = 200

$$\text{إذاً } \bar{د} = \frac{200 + 100}{0.80 - 1}$$

$$= 1500$$

وبالتعويض في معادلة الإنفاق الاستهلاكي نجد أن :

$$\text{إذاً } \bar{د} = \frac{(200)\ 0.80 + 100}{0.80 - 1}$$

$$1300 =$$

ثانياً : تغيرات التوازن العام

سوف تستمر القيم التوازنية السابقة إلى أن يتغير واحد من عناصر الإنفاق المستقلة عن الدخل الواردة بالنموذج والسؤال ما مقدار التغيير في الدخل التوازني الذي يترتب على التغير المذكور .

هناك عنصران مستقلان عن الدخل بالنموذج المبسط الذي تستخدمه هما الاستهلاك المستقل (أ) والإنفاق الاستثماري (ث) . ولنبدأ بتغير الاستهلاك المستقل من (أ) إلى (أ + Δ أ) فنلاحظ أن مستوى الدخل التوازني الجديد سيصل إلى :

$$\text{إذاً } \text{د}_1 = \frac{\text{أ} + \Delta\,\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}}{\text{أ} - \text{ب}}$$

$$= \frac{\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}}{\text{أ} - \text{ب}} + \frac{\Delta\ \text{أ}}{\text{أ} - \text{ب}}$$

أي أن التغير في الدخل التوازني سوف يكون في نفس اتجاه التغير في الاستهلاك المستقل فإذا زاد الاستهلاك المستقبل فسوف يزيد الدخل ، غير أن مقدار الزيادة في الدخل ($\frac{\Delta\,\text{أ}}{\text{أ} - \text{ب}}$) سيكون بمقدار أكبر من حجم التغير في الاستهلاك المستقل وذلك بالنظر إلى القيود الواردة على المعامل "ب" والتي تجعل قيمتها موجبة وتقل عن الواحد . أما إذا انخفض الاستهلاك المستقل فسوف ينخفض الدخل التوازني وبمقدار يتجاوز حجم الانخفاض في الاستهلاك المستقل .

أما إذا تغير الإنفاق الاستثماري من ث ه إلى ث ه + Δ ث فإن الدخل التوازني الجديد سيبلغ :

$$\text{د}_1 = \frac{\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}} + \Delta\,\text{ث}}{1 - \text{ب}}$$

$$= \frac{\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}}{\text{أ} - \text{ب}} + \frac{\Delta\,\text{ث}}{1 - \text{ب}}$$

وتوضح هذه الصورة أنه عند تغير الإنفاق الاستثماري يتغير الدخل في الاتجاه وبمقدار أكبر من حجم التغير في ذلك الإنفاق .

وبطرح مستوى الدخل التوازني السابق عن المستوى الجديد نحصل

$$\Delta \text{د} = \frac{\Delta \text{أ}}{1 - \text{ب}} \quad \text{أو} \quad \Delta \text{د} = \frac{\Delta \text{ث}}{1 - \text{ب}}$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{أ}} = \frac{1}{1 \quad \text{ب}} \quad \text{أو} \quad \frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{أ}} = \frac{1}{1 - \text{ب}}$$

وهو مضاعف الإنفاق المعروف والذي يساوي مقلوب الميل الحدى للادخار . فالميل الحدي للادخار ، كما نعلم ، يساوي المقام بالصيغة السابقة حيث أنه يساوي واحد ناقص الميل الحدى للاستهلاك ، وسوف يكون المقلوب أكبر من الواحد الصحيح ومن هنا جاء مصطلح المضاعف .

ومن ثم فإنه يمكننا حساب حجم التغير في الدخل التوازني عند تغير أحد عناصر الإنفاق بصورة مباشرة من المعادلة . فإذا تغير الاستهلاك المستقل أو الاستثمار فإن :

$$\Delta \text{د} = \frac{1}{1 - \text{ب}} \Delta \text{أ} \quad \text{أو} \quad \Delta \text{د} = \frac{1}{1 - \text{ب}} \Delta \text{ث}$$

مثال : أحسب حجم التغير في الدخل التوازني في المثال السابق إذا مـا تغيـر الإنفاق الاستثماري من 200 إلى 150 وحـدة .

الحـل : يمكن حساب حجم الدخل التوازني الجديد باستخدام .

$$د = 100 + 0.80 د + 150$$

$$0.20 د = 250$$

$$إذاً \bar{د}_1 = 1250$$

أي أن انخفاض الإنفاق الاستثماري بمقدار ٥٠ وحـدة ترتـب عليـه انخفاض مستوى الدخل التوازني من ١٥٠٠ إلى ١٢٥٠ أي بمقدار ٢٥٠ وحدة.

أو بالتعويض في المعادلة :

$$\Delta د = \frac{1}{1 - ب} \Delta ث$$

$$= \frac{1}{1 - 0.8} (-50)$$

$$= 250$$

أي أننا نحصل على مقدار التغير في الدخل التوازني بالتعويض المباشر في الصيغة السابقة .

ثالثاً : نموذج يضم القطاع الحكومي

أصبحت مسئولية تحقيق الاستقرار الاقتصادي في مجتمع ما من المهام الرئيسة المنوطة بالقطاع الحكومي . فمن خلال إنفاق هذا القطاع على مختلف السلع والخدمات يؤثر بصورة مباشرة في حجم الطلب الكلي السائد بالمجتمع ومن ثم في حجم الدخل التوازني ، ومن جهة أخرى يؤدي العمل على توفير موارد مختلفة لتمويل إنفاق القطاع إلى التأثير على إنفاق القطاعات الأخرى المكونة للاقتصاد القومي . فعلى سبيل المثال ، يؤدي استقطاع جزء من دخل القطاع العائلي في صورة ضرائب إلى تخفيض حجم إنفاق ذلك القطاع .

كما يؤدي إعفاء الإنفاق الاستثماري من رسوم أو ضرائب معينة إلى تشجيع ذلك الإنفاق . وسوف نبدأ بأبسط الافتراضات وهي أن حجم إنفاق القطاع الحكومي محدد خارج النموذج عند المستوى "ح" وأن ما تحصله من إيرادات يتمثل في ضرائب مقطوعة مقدارها "ض" في هذه الحالة يصبح النموذج مكون من المعادلات التالية :

$$ك = أ + ب\, د_{م}$$

$$ث = ث_{ه}$$

$$ح = ح_{ه}$$

$$ض = ض_{ه}$$

حيث $د_{م}$ هو الدخل المتاح وهو الدخل مطروحاً من الضرائب الصافية أما بقية الرموز الواردة فلها نفس المعنى السابق استخدامه .

وبالتعويض في شـــرط التوازن للحصول على الصورة المختزلة نجد

أن : د = ك + ث + ح

د = أ + ب (د – ض ه) + ث ÷ + ح ه

= أ + ب د – ب ض ه + ث ه + خ ه

إذاً د‾ = (أ – ب ض ه + ث ه + ح ه) / (أ – ب)

ك‾ = (أ – ب ض ه + ب ث ه + ب ح ه) / (أ – ب)

مثال : إذا علمت أن :

ك = 100 + 0.75 دم

ث = 50

ح = 20

ض = 10

فأحسب القيم التوازنية

الحــــل

يمكننا التعويض في شرط التوازن فنحصل على :

$$\text{د} = \text{ك} + \text{ث} + \text{ح}$$

$$= 100 + 0.75\,(\text{د} - 10) + 50 + 20$$

$$= 100 + 0.75\,\text{د} - 7.5 + 50 + 20$$

$$.25\,\text{د} = 165.5$$

$$\text{إذاً}\ \bar{\text{د}} = 650$$

ومن ثم فإن

$$\text{د}_{\text{م}} = 650 - 10$$

$$= 640$$

مستوى الإنفاق الاستهلاكي يتحدد بالتعويض في دالة الاستهلاك :

$$\text{ك} = 100 + 0.75\,(640)$$

$$= 580$$

بالطبع يمكننا التعويض في الصيغة المختصرة للنموذج مباشرة نجد أن :

$$\bar{\text{د}} = \frac{100 - 0.75\,(10) + 50 + 20}{1 - 0.75}$$

$$= 650$$

$$\text{إذا}\ \bar{\text{ك}} = \frac{100 - 0.75\,(10) + 50 + 0.75\,(20)}{1 - 0.75}$$

$$= \frac{145}{0.25}$$

$$= 580$$

بالرجوع إلى الصيغة المختصرة للدخل التوازني ، نلاحظ أن تغير الاتفاق الحكومي سوف يؤدي إلى تغير مستوى الدخل التوازني في الاتجاه وبمقدار أكبر من مقدار التغير في الإنفاق حيث نجد أن مستوى الدخل التوازني الجديد "د١" سيكون :

$$د_١ = \frac{أ - ب ض_٠ + ث_٠ + ح_٠ + \Delta ح}{1 - ب}$$

وبالطرح لتحديد مقدار التغير في الدخل نجد أن :

$$\Delta د = \frac{\Delta ح}{أ - ب}$$

$$= \frac{1}{1 - ب} \Delta ح$$

وحيث أن قيمة الكسر الموضح تفوق الوحدة بالنظر لوقوع المعلمة "ب" بين الصفر والواحد صحيح ، فإن مقدار التغير فا ي لدخل التوازني يفوق مقدار التغير في الإنفاق الحكومي . ويطلق على المقدار $\frac{\Delta د}{\Delta ح}$ مضاعف الإنفاق الحكومي وهو يساوي مقلوب الميل الحدي للادخار ويساوي مضاعف الاستثمار السابق الإشارة إليه بالنموذج المبسط .

أما تغير الضرائب المقطوعة فسوف يترتب عليه تغير الدخل التوازني في الاتجاه العكسي حيث نلاحظ أن المستوى الجديد للدخل التوازني بعد تغيير الضرائب سيكون :

$$\text{د}_1 = \frac{\text{أ} - \text{ب ض}_{\text{ه}} - \text{ب}\,\Delta\,\text{ض} + \text{ب ث}_{\text{ه}} + \text{ب ح}_{\text{ه}}}{1 - \text{ب}}$$

ومن ثم فإن مقدار التغير في الدخل هو :

$$\Delta\,\text{د}\,1 = \frac{-\text{ب}\,\Delta\,\text{ض}}{1 - \text{ب}}$$

$$= \frac{-\text{ب}}{1 - \text{ب}}\,\Delta\,\text{ض}$$

فالتغير في الدخل التوازني يكون في الاتجاه المضاد للتغير في الضرائب ، كما أن مقدار التغير في الدخل يفوق مقدار التغير في الضرائب ، أن القيمة المطلقة للكسر $\frac{\text{ب}}{1 - \text{ب}}$ أكبر من الواحد الصحيح بالنظر للقيود الواردة على قيمة المعلمة "ب" كما نلاحظ أن قيمة مضاعف الانفاق الحكومي أكبر من القيمة المطلقة لمضاعف الضرائب .

مما سبق ذكره عن العلاقة بين مضاعف الإنفاق الحكومي ومضاعف الضرائب نستطيع استنتاج أن تغيير كل من الإنفاق الحكومي والضرائب بنفس المقدار

لا يترك الدخل التوازني عند نفس مستواه السابق ، بل أن المستوى التوازني للدخل يتغير نتيجة لإتباع السياسة السابقة . فزيادة الإنفاق الحكومي بمقدار معين وفي نفس الوقت تزاد الضرائب بذات المقدار يؤدي إلى زيادة الدخل التوازني .

إن الأثر التوسعي المترتب على زيادة الإنفاق الحكومي (ويساوي مقدار التغير في الإنفاق مضروباً في مضاعف الإنفاق الحكومي) يفوق الإنكماشى المترتب على زيادة الضرائب (ويساوي مقدار التغير في الضرائب مضروبا في مضاعف الضرائب) بالنظر إلى أن حجم مضاعف الإنفاق الحكومي أكبر من حجم مضاعف الضرائب .

مثال : إذا علمت أن :

ك = 100 + 0.75 دم

ث = 50

ح = 30

ض = 20

فأحسب القيم التوازنية

الحـــل : بالتعويض في الصورة المختزلة للنموذج نجد أن الدخل التوازني هو

$$\text{د} = \frac{\text{أ} - \text{ب ض}_{\text{ه}} + \text{ث}_{\text{ه}} + \text{ح}_{\text{ه}}}{1 - \text{ب}}$$

$$= \frac{100 - 0.75\,(20) + 50 + 30}{1 - 0.75}$$

$$= \frac{165}{0.25}$$

$$= 660$$

ونلاحظ أن الفارق بين المثال الأخير والسابق عليه يتمثل في زيادة كل من الإنفاق الحكومي والضرائب بمقدار "10" وحدات ، وقد ترتب علـــى ذلـك تغير حجم الدخل التوازني من "650" إلى "660" أي بمقدار يساوي تماما مقدار الزيادة في الإنفاق الحكومي أو في الضرائب . ويطلق على ما سبق "مضاعف الميزانية المتوازنة" وحيث أن المضاعف هو رقم يضرب في مقدار التغير في العنصر للحصـــول على مقدار التغير في الـــدخل فـــإن مضـــاعف الميزانيـــة المتوازية ، كما يوضح المثال السابق ، يساوي واحد صحيح .

من الجدير بالملاحظة أن الإنفاق الحكومي قد يكون في صورة إعانات وما يسمى مدفوعات تحويلية "ع" للأفراد وفي هذه الحالة يتم الوصول إلى قـــيم التوازنية والمضاعفات المختلفة بنفس الأسلوب السابق حيث أن تعريف الـــدخل المتاح هو الدخل بعد طرح صافي الضرائب منه أي أن :

$$\text{د}_{\text{م}} = \text{د} - (\text{ض} - \text{ع})$$

$$= \text{د} + \text{ع} - \text{ض}$$

ويفرض أن الإعانات مقطوعة وتساوي ع ه نجد أن الدخل التوازني هـــو :

$$\bar{\text{د}} = \frac{\text{أ} + \text{ب}\,\text{ع}_{\text{ه}} - \text{ب}\,\text{ض}_{\text{ه}} + \text{ث}_{\text{ه}} + \text{ح}_{\text{ه}}}{1 - \text{ب}}$$

ومن هذه الصيغة يمكننا استنتاج مضاعف الإنفاق الحكومي ، مضاعف الضرائب ، مضاعف الإعانات حيث نحصل على :

$$\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ح}} = \frac{1}{1-\text{ب}} \quad ، \quad \frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ض}} = \frac{-\text{ب}}{1-\text{ب}} \quad ، \quad \frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ع}} = \frac{\text{ب}}{1-\text{ب}}$$

ونلاحظ على الفور تساوى القيمة المطلقة لمضاعف الضرائب مع مضاعف الإعانات مما يعني أن زيادة الضرائب لتمويل زيادة الإعانات والمدفوعات التحويلية لن يغير من مستوى الدخل التوازني . كما أن الأثر التوسعي لزيادة المدفوعات التحويلية يساوي تماماً الأثر الانكماشي المترتب على زيادة الضرائب وبالتالي لا يتأثر المستوى التوازني للدخل .

وسوف نستخدم فرضية أخرى فيما يتعلق بالضرائب المستخدمة في الاقتصاد ، فبدلاً من الاقتصار على الضرائب المقطوعة نفرض أنه بالإضافة الى هذه توجد ضرائب دخلية ، بعبارة أخرى أن دالة الضرائب الواردة في النموذج سوف تأخذ الصورة التالية :

$$\text{ض} = \text{ض}_0 + \text{ض}_1 \text{د}$$

حيث ض_0 الضرائب المقطوعة .

ض_1 معدل الضريبة أي النسبة المقتطعة من الدخل كضريبة .

فما هو أثر ذلك على القيم التوازنية والمضاعفات المختلفة بالنموذج ؟

يتكون النموذج المستخدم من المعادلات التالية :

$$\text{ك} = \text{أ} + \text{ب د}_{\text{م}}$$

$$\text{ث} = \text{ث}_0$$

$$ح = ح_ه$$

$$ع = ع_ه$$

$$ض = ض_ه + ض_ا د$$

$$د_م = د + ع - ض$$

الحصول على القيم التوازنية نعوض في شرط التوازن وهو :

$$د = ك + ث + ح$$

$$= أ + د_م + ث_ه + ح_ه$$

$$= أ + ب (د + ع_ه - ض_ه - ض_ا د) + ث_ه + ح_ه$$

$$د (1 - ب + ب ض_ا) = أ + ب ع_ه - ب ض_ه + ث_ه + ح_ه$$

$$\text{إذاً } \bar{د} = \frac{أ + ب ع_ه - ب ض_ه + ث_ه + ح_ه}{1 - ب + ب ض_ا}$$

توضح الصيغة السابقة أن مستوى الدخل التوازني في حالة استخدام ضرائب دخلية سيكون أقل عن مستواه في حالة استخدام ضرائب مقطوعة .

مثال : أحسب مستوى الدخل التوازني للنموذج

$$ك = 100 + 0.75 د_م$$

$$ث = 50$$

$$ح = 30$$

$$ض = 20 + 0.20 د$$

الحــــل : بالتعويض في الصيغة

$$\bar{\text{د}} = \frac{\text{أ} - \text{ب ض}_{٠} + \text{ث}_{٠} + \text{ح}_{٠}}{1 - \text{ب} + \text{ب ض}_{١}}$$

$$= \frac{30 + 50 + 15 - 100}{0.15 + 0.75 - 1}$$

$$= \frac{165}{0.40}$$

$$= 412.5$$

أما قيم المضاعفات المختلفة فيتم استنتاجها بنفس الأسلوب .

$$\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{أ}} = \frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ث}} = \frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ح}} = \frac{1}{1 - \text{ب} + \text{ب ض}_{١}}$$

$$\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ض}_{٠}} = \frac{-\text{ب}}{1 - \text{ب} + \text{ب ض}_{١}}$$

$$\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ع}} = \frac{-\text{ب}}{1 - \text{ب} + \text{ب ض}_{١}}$$

وبالمقارنة نجـــد أن قيم تلك المضاعفـــات تقــل عن مثيلاتها في النماذج التي لا تشتمل على ضرائب دخلية ، ويعني انخفاض قيم المضاعفات أن تغيير حجم

أي عنصر من عناصر الإنفاق المستقلة عن الدخل سوف تؤدي إلى تغيير مستوى الدخل التوازني ولكن بمقدار يقل عما يتحقق في حالة استخدام الضرائب المقطوعة فقط ، ويطلق بصفة عامة على العوامل التلقائية التي تغير من قيم المضاعفات عوامل الاستقرار الكامنة في النموذج ، وقد أورد النموذج السابق أحد أمثلتها وهي ارتباط الضرائب بالدخل . ومن أمثلتها الأخرى ارتباط المدفوعات التحويلية للقطاع الحكومي ومستوى الدخل حيث نجد أنها تنخفض تلقائياً مع زيادة الدخل وتزداد تلقائياً في حالة انخفاض الدخل ومن ثم تؤثر في قيم المضاعفات .

ويتيح لنا التحليل السابق للتوازن حساب مقدار التغير اللازم في عناصر الإنفاق للوصول بمستوى الدخل إلى مستوى معين . ويمكننا حساب التغير اللازم إحداثه في الإنفاق الحكومي بنوعيه (المباشر على السلع والخدمات أو المدفوعات التحويلية للأفراد) أو في الضرائب المقطوعة أو في معدل الضريبة لغرض تحقيق زيادة معينة في الدخل التوازني .

مثال :

أ- أحسب مقدار التغير اللازم في حجم الإنفاق الحكومي أو في حجم الضرائب المقطوعة الواردة بالمثال السابق للوصول بالدخل التوازني إلى 437.5 .

ب- أحسب كذلك التغير اللازم في معدل الضريبة لتحقيق ذات الدخل المستهدف.

الحـــل : (أ) من صيغة مضاعف الإنفاق الحكومي نعلم أن :

$$\Delta\,\text{د} = \frac{1}{1 - \text{ب} + \text{ب}\,\text{ض}_1}\;\Delta\,\text{ح}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$25 = \frac{1}{1 - 0.75 + 0.15} \Delta \text{ح}$$

إذا Δ ح = 10

أي أنه يجب أن يرتفع الإنفاق الحكومي من "30" إلـــى "40" وحـــدة لتحقيق الدخل المستهدف .

أما عن مقدار التغير في الضرائب المقطوعة فـــيمكن حســـابه بـــنفس الأسلوب السابق ، بالتعويض في المعادلة :

$$\Delta \text{د} = \frac{-\text{ب}}{1 - \text{ب} + \text{ب ض}_{١}} \Delta \text{ض}_{ه}$$

$$25 = \frac{0.75}{1 - 0.75 + 0.15} \Delta \text{ض}_{ه}$$

إذا Δ ضه = 13.33

أي أنه يجب تخفيض الضرائب المقطوعة بمقدار 13.33 (وهو يفـــوق مقدار التغير في الإنفاق الحكومي لصغر قيمة مضاعف الضرائب) فتصبح دالة الضرائب بالنموذج هـــي :

ض = 6.67 + 0.20 د

ب- رغم أننا لم نحسب مضاعف معدل الضريبة بعد ، إلا أننا نستطيع حساب التغير المطلوب باستخدام الصيغة المختزلة للدخل التوازني وهي :

$$د = \frac{أ - ب ض_ه + ث_ه + ح_ه}{أ - ب + ب ض_ا}$$

$$437.5 = \frac{100 - 15 + 50 + 30}{1 - 0.75 + 0.75 ض_ا}$$

$$= \frac{165}{0.25 + 0.75 ض_ا}$$

إذاً ض 1 = 0.17

أي أنه يجب على الدولة تخفيض معدل الضريبة من 0.20 إلى 0.17 وتصبح دالة الضريبة النموذج :

$$ض = 20 + 0.17 د$$

لتحقيق المستوى المستهدف للدخل التوازني .

رابعاً : نموذج يضم القطاعين الحقيقي والنقدي .

اقتصرت مناقشتنا حتى الآن على النماذج التي تفترض أن الإنفاق الاستثماري محدد خارج النموذج ويعد أحد المعطيات للباحث . وكما نعلم أن الاستثمار دالة عكسية في سعر الفائدة فما أثر إدخال هذه الحقيقة في تحليلنا ؟

سوف تتغير دالة الاستثمار محل الدراسة إلى الصورة التالية :

$$ث = ث_{ه} - جـ ف$$

حيث "$ث_{ه}$" هو الاستثمار المستقل عن سعر الفائدة .

"جـ" حساسية الاستثمار للتغيرات في الفائدة .

وتوضح هذه الدالة أن تقلبات سعر الفائدة سوف تؤدي إلى تغير الإنفاق الاستثماري في الاتجاه المضاد ، فانخفاض الفائدة يشجع على زيادة الإنفاق الاستثماري مما يؤدي بدوره إلى زيادة الدخل التوازني بمقدار أكبر من خلال مضاعف الاستثمار . وبعبارة أخرى ، أن مستوى الدخل التوازني يعتمد على سعر الفائدة السائد في السوق . ولتوضيح ذلك رياضياً نعرض النموذج التالي والذي سوف يشتمل على تغيير دالة الاستثمار في النموذج الأخير .

$$ك = أ + ب د_{م}$$

$$ث = ث_{ه} - جـ ف$$

$$ح = ح_{ه}$$

$$ض = ض_{ه} + ض_{1} د$$

وبالتعويض في شرط التوازن نجد أن :

$$د = \frac{أ - ب ض_{ه} + ث_{ه} + ح_{ه} - جـ ف}{1 - ب + ب ض_{1}}$$

وحيث أن الصيغة السابقة تحتوي على مجهولين فلا يمكننا الوصول إلى تحديد أحدهما بدون معرفة سابقة بقيمة الآخر . فإذا علمنا مستوى سعر الفائدة يمكننا تحديد مستوى الدخل التوازني لكل سعر فائدة ، أو يمكننا تحديد سعر الفائدة اللازم لبلوغنا مستوى دخل توازني معين .

وبعبارة أخرى إننا انتقلنا من مستوى دخل توازني فريد إلى عدد لا نهائي من مستويات الدخل التوازني طبقاً لمستوى سعر الفائدة . ويطلق على العلاقة التي توجد بين الدخل التوازني وأسعار الفائدة المنحنى "ث خ" وهي المعطاة بالصيغة السابقة للدخل التوازني بالمنحنى "ث خ" يوضح أزواج القيم من الدخل والفائدة التي يتساوى عندها الطلب الكلي مع العرض الكلي من السلع والخدمات ، أي أنه الشرط الهندسي لشرط توازن سوق الإنتاج ، ونلاحظ العلاقة العكسية بين مستوى الدخل التوازني وسعر الفائدة وهذا يعود للعلاقة العكسية بين الإنفاق الاستثماري وبين سعر الفائدة .

مثال : أحسب منحنى التوازن في النموذج المبسط التالي :

ك = 150 + 0.80 د

ث = 70 – 50 ف

ثم أحسب مستوى الدخل التوازني عند كل من أسعار الفائدة 5% ، 20% .

الحـــل : بالتعويض في شرط التوازن ، أو في صيغة المنحنى "ث خ" مباشرة نحصل على :

د = ك + ث

د = 150 + 0.80 د + 70 − 50 ف

0.2 د = 220 − 50 ف

د̄ = 1100 − 250 ف

المستوى التوازني للدخل عن ف = 0.05 هـو :

$$= 1100 - 250 \text{ X } 0.05$$

$$= 1050$$

يتطلب تحديد الدخل التوازني في سوق الإنتـاج إذن معرفـة مسـبقة بمستوى سعر الفائدة فكيف يتحدد هذا السعر ؟ يتحدد سعر الفائدة نتيجة التفاعل بين الطلب على النقود والكمية المعروضة منها ، فهو ظاهرة نقدية مما يلزمنـا دراسة سوق النقود وكيف تتحدد الكمية المطلوبة والكمية المعروضة من النقود.

بالنسبة للكمية المعروضة من النقود "ن" سوف نأخذها كمعطاة أي أنها تتحدد خارج النموذج وليكن عند المستوى "ن ه" . أما الطلب الكلي على النقود "ط" فينقسم إلى جزئين ، الأول "ل" هو الطلب على النقود لغرض المعـاملات والاحتياط وعادة ما يفترض أنه يرتبط خطياً بمستوى الـدخل ، أي أن دالـة الطلب على النقود لغرض المعاملات ستأخذ الشكل :

ل$_1$ = م د

حيث "م" هي النسبة المحتفظ بها من الدخل في صورة نقود . أما الجزء الثاني من الطلب على النقود "ل$_2$" فهو الطلب عليها لغرض المضاربة ، وهـذا يرتبط عكسياً بسعر الفائدة . فدالة الطلب على النقود للمضاربة تأخذ صورة :

ل$_2$ = ل ه − و ف

حيث ل ه الطلب على النقود للمضاربة المستقل عن الفائدة .

"و" حساسية الطلب على النقود للمضاربة لتغيرات سعر الفائدة .

من العناصر السابقة يكتمل النموذج الذي يصف سوق النقود حيث نجد أن :

ن = ن ه

ل ١ = م د

ل 2 = ل ه − وف

ن = ط

وبالتعويض في شرط التوازن في سوق النقود :

ن ه = م د + ل ه − وف

م د = ن ه − ل ه + وف

د = (ن ه − ل ه + وف) / م

توضح الصيغة السابقة أن المستوى التوازني للدخل في سوق النقود يعتمد على مستوى سعر الفائدة ، فالصيغة تشتمل على مجهولين ولابد من معرفة أحدهما لتحديد الآخر ، فتحديد سعر الفائدة يتطلب معرفة مستوى الدخل . وتصف الصيغة السابقة أزواج القيم من الدخل والفائدة التي تتمشى مع تحقيق التوازن (أي تساوي العرض مع الطلب) في سوق النقود . ويطلق على

الصيغة السابقة منحنى "ط ن" فهو الشرط الهندسي لشرط توازن سوق النقود .
ونلاحظ أن المنحنى "ط ن" موجب الميل حيث أن زيادة مستوى الدخل التوازني في سوق النقود تتطلب ارتفاع سعر الفائدة .

مثـــال : أحسب معادلة المنحنى "ط ن" علماً بأن :

$$ن = 300$$

$$ل_1 = 0.20 \text{ د}$$

$$ل_2 = 100 - 150 \text{ ف}$$

الحـــــل : بالتعويض في شرط التوازن ، أو صيغة المنحنى "ط ن" نحصـل على :

$$300 = 0.20 \text{ د} + 100 - 80 \text{ ف}$$

$$0.20 \text{ د} = 200 + 150 \text{ ف}$$

$$\text{د} = 1000 + 750 \text{ ف}$$

وبالتعويض عن سعر الفائدة بقيم معينة يمكننا معرفة مقدار الدخل التوازني في سوق النقود المتمشي مع تلك القيم ، وحيث أن كلاً من صيغ المنحنـــى "ث خ" والمنحنى "ط ن" تشتمل على المجهولين الدخل وسعر الفائدة ، فإنه يمكننـــا أن نحل المعادلتين آنياً لتحديد القيم التوازنية للمجهولين ، بعبارة أخرى أن توازن سوق الإنتاج وسوق النقود يتم آنياً أي طبقاً للتفاعل بين السوقين ، وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{أ - ب ض_ه + ث_ه + ح_ه - جـ ف}{1 - ب + ب ض_1} = \frac{ن_ه - ل_ه + و ف}{م}$$

ومن هنا نستنتج أن الصيغة المختزلة للنموذج هي :

$$\bar{د} = \frac{و\ (أ - ب\ ض_{ه} + ث_{ه} + ح_{ه}) + جـ\ (ن_{ه} - ل_{ه})}{و\ (1 - ب + ب\ ض_{1}) + جـ\ ف}$$

$$\bar{ف} = \frac{م\ (أ - ب\ ض_{ه} + ث\ ه + خ\ ه) - (1 - ب + ب\ ض_{1})\ (ن_{ه} - ل_{ه})}{و\ (1 - ب + ب\ ض_{1}) + جـ\ م}$$

لعل المثال العددي والذي يضم كل من منحنى "ث خ" ، منحنى "ط ن" الواردان بالأمثلة السابقة يوضح كيفية حساب القيمة التوازنية للدخل والفائدة التي تحقق التوازن في السوقين .

$ك = 150 + 0.80$ د

$ث = 70 - 50$ ف

$ن = 300$

$ل_{1} = 0.20$ د

$ل_{2} = 100 - 150$ ف

وحيث أننا نعلم أن :

د $= 1100 - 250$ ف "ث خ"

د $= 1000 + 750$ ف "ط ن"

فإنه بحل هاتين المعادلتين سوياً نحصل على :

إذاً $\bar{ف} = 0.10$

$\bar{د} = 1075$

وبالطبع يمكننا التعويض في الصيغة المختزلة للنموذج وتحديد القيم التوازنية مباشرة .

الفصل الثالث

المصفوفات (MATRICES)

المصفوفة هي مجموعة من القيم مرتبة في شكل أعمدة وصفوف والمصفوفة تختلف عن المحدد حيث يكون للمحدد قيمة رقمية لا تتغير مهما غيرنا من وضع الأعمدة والصفوف بينما تتغير المصفوفة إذا تغير وضع الأعمدة والصفوف فيها ولهذا لا يكون للمصفوفة قيمة محددة ، وأيضاً يمكن أن تختلف عدد الأعمدة عن عدد الصفوف في المصفوفة ولكن لا يمكن ذلك في المحدد ولكل مصفوفة نظام هو عبارة عن عدد الصفوف × عدد الأعمدة .

فإذا رمزنا لعدد الصفوف بالرمز (م) وعدد الأعمدة بالرمز (ن) فعلى ذلك تكون المصفوفة مكونة من م ن عنصر .

وإذا كان م = ن تسمى المصفوفة مربعة .

جمع وطرح المصفوفات :

لا يمكن جمع وطرح المصفوفات إلا إذا كانت لها نظام واحد وناتج عملية الجمع أو الطرح هو مصفوفة لها نفس النظام بمعنى أن :

عدد صفوف الأولى = عدد صفوف الثانية .

وعدد أعمدة الأولى = عدد أعمدة الثانية

مثال (١) : أجمع

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

الحــــل :

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

مثال (٢) : أجمع

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

الحــــل :

$$\begin{pmatrix} ١+١+٣ & ٠+٣+٢ \\ ٣+١+١ & ٢+١+٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٦ & ٦ \end{pmatrix} =$$

ضرب المصفوفـــات :

(أ) ضرب عدد في مصفوفة

- مثال (٣) أوجـــد :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix} \times ٥$$

الحــــل :

$$\begin{pmatrix} ٥ & ١٠ & ٥ \\ ٢٠ & ٥ & ١٥ \end{pmatrix}$$

مثال (٤) أوجد ناتج :

$$3\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

الحـــل :

$$\begin{pmatrix}2\times 3 & 3\times 3\\ 1\times 3 & 4\times 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\times 1 & -2\times 5\\ -2\times 1 & -2\times 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\times 1 & -3\times 2\\ -3\times -1 & -3\times 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 9\\ 3 & 12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -10\\ -2 & -8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & -6\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6-2-3 & 9-10-6\\ 3-2+3 & 12-8-9\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -7\\ 4 & -5\end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى :

يمكن ضرب مصفوفتين إذا توافر الشرط الآتـــي :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية ويكـون نـاتج عملية الضرب مصفوفة على نظام عدد صفوف المصفوفة الأولى فـي عـدد أعمدة المصفوفة الثانية .

مثال (٥) أوجـــد :

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$$

٢×٣ شرط الضــــرب ٣×٢

← ناتج عملية الضرب →

$$\begin{pmatrix} ٣\times٥ + ١\times١ + ٢\times٢ & ١\times٥ + ٢\times١ + ١\times٢ \\ ٣\times١ + ١\times٢ + ٢\times٣ & ١\times١ \div ٢\times٢ + ١\times٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٢٠ & ٩ \\ ١١ & ٨ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ١٥ + ١ + ٤ & ٥ + ٢ + ٢ \\ ٣ + ٢ + ٦ & ١ + ٤ + ٣ \end{pmatrix}$$

مثال (٦)

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

٢×٢ ← شرط الضرب → ٢×٣

← ناتج عملية الضــــرب →

$$\begin{pmatrix} ٤ \times ٣ + ٣ \times ١ & ١ \times ٣ + ٢ \times ١ \\ ٤ \times ١ + ٣ \times ٢ & ١ \times ١ + ٢ \times ٢ \\ ٤ \times ٢ + ٣ \times ١ & ١ \times ٢ + ٢ \times ١ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ١٥ & ٥ \\ ١٠ & ٥ \\ ١١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ + ٣ & ٣ + ٢ \\ ٤ + ٦ & ١ + ٤ \\ ٨ + ٣ & ٢ + ٢ \end{pmatrix} =$$

المعكوس الضربي للمصفوفات (معكوس المصفوفة)

يشترط أساساً لإيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة ما أن تكون مربعة وأن يكون المحدد الذي تكونه من عناصرها لا يساوي الصفر . ولإيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة ما نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد قيمة المحدد الذي يتكون من عناصر المصفوفة ونتأكد من أنه ≠ صفر .

(٢) إيجاد متممات كل عنصر من عناصر المحدد وذلك بإيجاد قيمته وضربه في (-١) مرفوع إلى أس يساوي مجموع ترتيب صف وعمود العنصر الذي نجد له المتمم .

(٣) هذه المتممات تكون مصفوفة .

(٤) إيجاد تحوير المصفوفة السابقة بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف.

(٥) قسمة كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة الأخيرة على المحدد الذي حسبناه في الخطوة الأولى .

وبذلك نحصل على المعكوس الضربي للمصفوفة الأصلية (أو مقلوب المصفوفة) .

مثال (٧) :

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ$^{-١}$

- الحل :

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ٢٠ - ١٨ = ٢ \neq$ صفر

$|أ_{١١}| = +٥$ ، $|أ_{٢١}| = -٦$

$|أ_{١٢}| = -٣$ ، $|أ_{٢٢}| = +٤$

إذن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|} \begin{pmatrix} |أ_{٢١}| & |أ_{١١}| \\ |أ_{٢٢}| & |أ_{١٢}| \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤ & ٦- \end{pmatrix}$

للتحقيق من النتيجة :

$$(أ) \times أ^{-1} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٦ & ٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤\times٥+٣\times(-٦) & ٤\times(-٣)+٣\times٤ \\ ٦\times٥+٥\times(-٦) & ٦\times-٣+٥\times٤ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢٠ - ١٨ & -١٢ + ١٢ \\ ٣٠ - ٣٠ & -١٨ + ٢٠ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

- **مثال (٨)**

إذا كان ب = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ فأوجد ب $^{-١}$

الحــــــل

(ب) = ١ (٢-٣) - ٢ (-٢+٣) + (١-١)

= - ١ - ٢ + ٠ = -٣ ≠ صفر

$|أ_{١١}| = + (-١)$ $|أ_{٢١}| = - (-٥)$ $|أ_{٣١}| = + (٧)$

$|أ_{١٢}| = - (١)$ $|أ_{٢٢}| = + (-١)$ $|أ_{٣٢}| = - (٢)$

$|أ_{١٣}| = + (٠)$ $|أ_{٢٣}| = - (٣)$ $|أ_{٣٣}| = + (-٣)$

$$\text{إذاً ب}^{-١} = \frac{١}{٣-} \begin{array}{|ccc|} \hline ٠ & ١- & ١- \\ ٣- & ١- & ٥ \\ ٣- & ٢- & ٧ \\ \hline \end{array}$$

حل المعادلات باستخدام المصفوفات :

مثال (٩)

$$٢\,س + ٣\,ص = ١٥$$

$$٤\,س - ص = ٢$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ \\ ٢ \end{pmatrix} \longleftarrow (١)$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٤ \end{vmatrix} = -٢ - ١٢ = -١٤ \neq \text{صفر}$$

$$|أ_{١١}| = +(-١) \qquad |أ_{٢١}| = -(٤)$$

$$|أ_{١٢}| = -(٣) \qquad |أ_{٢٢}| = +(٢)$$

$$\text{إذاً أ}^{-١} = \frac{١}{١٤-} \begin{pmatrix} ٣- & ١- \\ ٢ & ٤- \end{pmatrix}$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في أ – ١

إذا $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{-١٤} \begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{-١٤} \begin{pmatrix} -١٥ & -٦ \\ -٦٠ & +٤ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{-١٤} \begin{pmatrix} -١٥ & -٦ \\ -٦٠ & +٤ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{٢١}{١٤} \\ \frac{٥٦}{١٤} \end{pmatrix}$$

إذا س = $\frac{٢١}{١٤} = \frac{٣}{٢}$ ، ص = $\frac{٥٦}{١٤} = ٤$

- **مثال (١٠)** باستخدام المصفوفات حل المعادلات

٢ س + ص + ع = ٤

س + ص + ع = ٣

س + ٢ ص + ٣ ع = ٦

الحـــــل :

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \\ ٦ \end{pmatrix} \leftarrow (١)$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٣−٢) − (٣ − ٢) + (١−١)

= ٢ − ١ = صفر = ١ ≠ سفر

∴ $|أ_{١١}| = +(١)$ ، $|أ_{٢١}| = -(٢)$ ، $|أ_{٣١}| = +(١)$

$|أ_{١٢}| = -(١)$ ، $|أ_{٢٢}| = +(٥)$ ، $|أ_{٣٢}| = -(٣)$

$|أ_{١٣}| = +(٠)$ ، $|أ_{٢٣}| = -(١)$ ، $|أ_{٣٣}| = +(-١)$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٥ & -١ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$$

بضربْ طرفي المعادلة (١) في $أ^{-١}$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٥ & -١ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ \;=\; & -٨ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ +١٥ & -٦ \\ -٩ & +٦ \end{pmatrix}$$

٣×٣ $\qquad$ $٣ \times ١ = ٣ \times ١$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

إذاً س = ١

إذاً ص = ١

إذاً ع = ١

مثال (١١) : استخدم معكوس المصفوفة في حل المعادلتين :

$$٦ س - ص = ٦$$

$$٩ س + ٢ ص = -٥$$

نكتب المجموعة على الصورة

$$\begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ ٩ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ -٥ \end{pmatrix}$$

$$أ\, س = ب \longrightarrow س = أ^{-١}\, ب$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٦ & ١- \\ ٩ & ٢ \end{vmatrix} = ٢١ \neq \text{صفر}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} = \begin{vmatrix} +(٢) & -(٩) \\ -(-١) & +(٦) \end{vmatrix} = \frac{١}{٢١} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٩- & ٦ \end{vmatrix}$$

$\text{س} = \text{أ}^{-١}\ \text{ب}$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{١}{٢١} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٩- & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ٥- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} \\ ٤- \end{pmatrix}$$

إذاً الحل هو $\text{س} = \frac{١}{٣}$ ، $\text{ص} = -٤$

مثال (١٢) : باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية :

$$٤\text{س} + ٢\text{ص} - \text{ع} = ٥$$
$$٣\text{س} - \text{ص} - \text{ع} = -\text{ع}$$
$$\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = \text{صفر}$$

المعادلات السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{أس} = \text{ب} \longrightarrow \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8 + 4 - 4 = 8$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{|أ|} \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٣ & -٢ \\ -٣ & ١ & -١٠ \end{vmatrix} = \frac{١}{٨} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٢ & -١٠ \end{vmatrix}$$

س = أ$^{-١}$ ب

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٨} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٢ & -١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ -٢ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

إذا الحل هو س = ١ و ص = ٢ و ع = ٣.

تطبيقات على استخدام المصفوفات

أولاً : التوازن في عدة أسواق

كثيراً ما تتفاعل الكميات المطلوبة أو الكميات المعروضة من سلعة ما بما يحدث في أسواق سلع أخرى ، ونستطيع تبسيط العمليات الحسابية في النماذج التي تشمل عدة سلع وذلك باستخدام المصفوفات . ولتوضيح ذلك نعرض المثال التالي الذي يشمل ثلاث سلع .

مثـــال : إذا علمت أن :

$$\text{ط}_1 = 20 - 3\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3$$
$$\text{ع}_1 = 9\text{س}_1$$

$$\text{ط}_2 = 30 + \text{س}_1 - 5\text{س}_2$$
$$\text{ع}_2 = 30\text{س}_2 - 3$$

$$\text{ط}_3 = 15 + \text{س}_1 - \text{س}_3$$
$$\text{ع}_3 = 3\text{س}_3 - 1$$

فأحسب الأسعار والكميات التوازنية ،

الحـــل : بالتعويض في شرط التوازن لكل سوق نحصل على المعادلات الآتية التالية :

$$12\text{س}_1 - \text{س}_2 - \text{س}_3 = 20$$
$$-\text{س}_1 + 35\text{س}_2 = 33$$
$$-\text{س}_1 + 6\text{س}_3 = 16$$

وباستخدام المصفوفات نجد أن مصفوفة المعالم في النظام السابق

$$
أ = \begin{pmatrix} 12 & 1- & 1- \\ 1- & 35 & 0 \\ 1- & 0 & 6 \end{pmatrix}
$$

وبحساب مقلوب المصفوفة أو باستخدام قاعدة كرامر نستنتج أن :

$س_1 = 2$ $\quad$ $س_2 = 1$ $\quad$ $س_3 = 3$

$ك_1 = 18$ $\quad$ $ك_2 = 27$ $\quad$ $ك_3 = 8$

ثانياً : نموذج مبسط لتحديد الدخل :

تستخدم المصفوفات للحصول على القيم التوازنية في نماذج الدخل وهي بمختلف أنواعها ، فإذا استخدمنا النموذج المبسط التالي لتحديد القيم التوازنية.

د = ك + ث + ح

ك = أ + ب د

ث = $ث_ه$ + $ث_1$د

ح = $ح_ه$

حيث تشير الرموز إلى ذات المعاني السابق ذكرها . أما ث_1 فتوضح معدل تغير الإنفاق الاستثماري عند تغير الدخل .

نجد أنه بنقل المتغيرات الداخلية إلى الجانب الأيمن للمعادلات نحصل على :

$$\text{د} - \text{ك} - \text{ث} = \text{ح}_0$$

$$-\text{ب}\,\text{د} + \text{ك} + 0 = \text{أ}$$

$$-\text{ث}_1\text{د} + 0 + \text{ث} = \text{ث}_0$$

وهذه يمكن إعادة صياغتها في صورة المصفوفات التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\text{ب} & -1 & 0 \\ -\text{ث}_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{د} \\ \text{ك} \\ \text{ث} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ح}_0 \\ \text{أ} \\ \text{ث}_0 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق قاعدة كرامر نجد أن القيم التوازنية للمتغيرات الداخلة بالنموذج هي :

$$\bar{\text{د}} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ح} & -1 & -1 \\ \text{أ} & 1 & 0 \\ \text{ث} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\text{ب} & 1 & 0 \\ -\text{ث}_0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ح}_0 + \text{أ} + \text{ث}_0}{1 - \text{ب} - \text{ث}_1}$$

ويمكن استنتاج ما يلي :

$$\bar{\text{ك}} = \frac{\text{أ} - \text{أ ث}_1 + \text{ب ح}_{\text{ه}} + \text{ب ث}_{\text{ه}}}{1 - \text{ب} - \text{ث}_1}$$

$$\text{ث} = \frac{\text{ث}_{\text{ه}} - \text{ب ث}_{\text{ه}} + \text{ث}_1\text{أ} + \text{ث}_1 \text{ح}_{\text{ه}}}{\text{أ} - \text{ب} - \text{ث}_1}$$

مثال : أحسب القيم التوازنية لنموذج الدخل التالي وذلك باستخدام قاعدة كرامر علما بأن :

ك = 50 + 0.65 د

ث = 20

ح = 30 + 0.1 د

الحـــل : باستخدام شرط التوازن .

د = ك + ث + ح

د − ك − ح = 20

− 0.65 + ك + 0 = 50

− 0.01 د + 0 ح = 30

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} د \\ ك \\ ث \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1- & 1- & 1 \\ 0 & 1- & 0.65- \\ 1 & 0 & 0.10 \end{pmatrix} \quad -$$

وباستخدام قاعدة كرامر

$$400 = \frac{100}{0.25} = \frac{\begin{vmatrix} 1- & 1- & 20 \\ 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1- & 1- & 1 \\ 0 & 1 & 0.65- \\ 1 & 0 & 0,10 \end{vmatrix}} = \bar{د}$$

$$310 = \frac{77.5}{0.25} = \frac{\begin{vmatrix} 1- & 20 & 1 \\ 0 & 50 & 0.65- \\ 1 & 30 & 0.10 \end{vmatrix}}{0.25} = \bar{ك}$$

$$\bar{ح} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 1- & 1 \\ 50 & 1 & 0.65- \\ 30 & 0 & 0.10 \end{vmatrix}}{0.25} = \frac{77.5}{0.25} = 70$$

ثالثاً : التوازن الكلي (ث خ ، ط ن)

كما تستخدم المصفوفات في حل النماذج الأكثر صعوبة ، لقد أوضحنا فيما سبق أن الدخل التوازني في سوق الإنتاج يتأثر بما يحدث في القطاع النقدي للاقتصاد ، بل أن التفاعل بين القطاعين يحدد القيم التوازنية للدخل والفائدة التي تحقق التوازن الكلي ، ويمكننا استخدام المصفوفات في هذا المجال ولنبدأ بالنموذج المبسط التالي حيث نجد أن :

ك = أ + ب د	ن = ن ه
ث = ث ه – جـ ف	ل١ = م د
	ل٢ = ل ه – و ف

وبالتعويض في شرط التوازن بالسوقين نجد أن :ـ

د (1 – ب) + جـ ف   = أ + ث ه

م د = و ف = ن ه – ل ه

وعند صياغة المعادلتين السابقتين في شكل مصفوفات نحصل على :

$$\begin{bmatrix} (\text{أ} - \text{ب}) & \text{ج} \\ \text{م} & -\text{و} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}} \\ \text{ن}_{\text{ه}} - \text{ل}_{\text{ه}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\text{د}} = \frac{\begin{vmatrix} (\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}) & \text{جـ} \\ (\text{ن}_{\text{ه}} - \text{ل}_{\text{ه}}) & -\text{و} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\text{ا} - \text{ب}) & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{و} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\text{و}\ (\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}) + \text{جـ}\ (\text{ن}_{\text{ه}} + \text{ل}_{\text{ه}})}{\text{و}\ (\text{ا} - \text{ب}) + \text{م}\ \text{جـ}}$$

$$\text{ف} = \frac{\begin{vmatrix} (\text{ا} - \text{ب}) & (\text{أ} + \text{ث}_{\text{ه}}) \\ \text{م} & (\text{ن}_{\text{ه}} - \text{ل}_{\text{ه}}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\text{ا} - \text{ب}) & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{و} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(1 - \text{ب})(\text{ن}_0 - \text{ل}_0) - \text{م}(\text{أ} + \text{ث}_0)}{\text{و}(1 - \text{ب}) + \text{م}\,\text{جـ}}$$

أما إذا اشتمل النموذج على القطاع الحكومي والذي يطبق الضرائب النسبية فإن النموذج سوف يتكون من :

$$\text{ك} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{د}_{\text{م}}$$

$$\text{ث} = \text{ث}_0 - \text{جـ}\,\text{ف}$$

$$\text{ح} = \text{ح}_0$$

$$\text{ض} = \text{ض}_0 + \text{ض}_1\,\text{د}$$

$$\text{ن} = \text{ن}_0$$

$$\text{ل}_1 = \text{م}\,\text{د}$$

$$\text{ل}_2 = \text{ل}_0 - \text{و}\,\text{ف}$$

وبالتعويض في شرطي التوازن بالسوقين نجد أن :

$$\text{د}(1 - \text{ب} + \text{ب}\,\text{ض}_1) + \text{جـ}\,\text{ف} = \text{أ} + \text{ث}_0 + \text{ح}_0 - \text{ب}\,\text{ض}_0$$

$$\text{م}\,\text{د} - \text{و}\,\text{ف} = \text{ن}_0 - \text{ل}_0$$

وباستخدام المصفوفات أو قاعدة كرامر لحساب القيم التوازنية نجد أن :

$$\begin{bmatrix} (1 - \text{ب} + \text{ب}\,\text{ض}_1) & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{و} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} + \text{ث}_0 + \text{ح}_0 - \text{ب}\,\text{ض}_0 \\ \text{ن}_0 - \text{ل}_0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\text{د}} = \frac{\text{و}(\text{أ} + \text{ث}_0 + \text{ح}_0 - \text{ب}\,\text{ض}_0) + \text{جـ}(\text{ن}_0 - \text{ل}_0)}{\text{و}(1 - \text{ب} + \text{ب}\,\text{ض}_1) + \text{م}\,\text{جـ}}$$

$$\bar{\text{ف}} = \frac{(\text{أ} - \text{ب} + \text{ب ض}_1)(\text{ن}_\text{ه} - \text{ل}_\text{ه}) - \text{م}\,(\text{أ} + \text{ث}_\text{ه} + \text{ح}_\text{ه} - \text{ب ض}_\text{ه})}{\text{و}\,(\text{أ} - \text{ب} + \text{ب ض}_1) + \text{م جـ}}$$

وبمقارنة المصفوفات السابقة نلاحظ أن عناصر مصفوفة المعالم في النموذجين السابقين قد تغير منها العنصر الأول "أ 1 أ " فبدلاً من (أ−ب) نجد إن إضافة القطاع الحكومي جعله يتغير إلى (أ−ب +ب ض₁) ونلاحظ كذلك أن العنصر الأول من متجه الثوابت قد تغير ليضم المتغيرات الخارجية الجديدة ، ومن ثم فإنه لدينا الآن أسلوب أكثر عمومية يوفر الكثير من الخطوات . نستطيع إضافة قطاع التجارة الخارجية (حيث يفترض عادة أن الصادرات "ص" محدد خارج النموذج عند القيمة ص ه بينما الواردات تعتمد على الدخل حيث و₁ الميل الحدي للاستيراد) مما يؤدي إلى تغير العناصر الواردة بالمصفوفات السابقة كالتالي :

$$\begin{bmatrix} (\text{أ} - \text{ب} + \text{ب ض}_1 + \text{و}_1) & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{و} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\text{أ} + \text{ث}_\text{ه} + \text{ح}_\text{ه} - \text{ب ض}_\text{ه}) \\ \text{ن}_\text{ه} - \text{ل}_\text{ه} \end{bmatrix}$$

ويمكننا الوصول إلى القيم التوازنية مباشرة بالتعويض في الصيغة المختزلة مع أخذ التغيرات السابقة في الحسبان .

كما أن التغيرات التي تطرأ في سوق النقد سوف تنعكس على "تغير" م "أو" "و" في مصفوفة المعالم أو في تغير قيمة العنصر (ن ه − ل ه) في متجه الثوابت .

وبالتعويض بالقيم الجديدة نستطيع حساب القيم التوازنية مباشرة . ولعل استخدام مثال عددي يوضح النقاط السابقة .

مثال : أ) أحسب الدخل التوازني للنموذج :

ك = 100 + 0.80 د

ث = 1200 − 30 ف

ن = 2500

ل١ = 0.25 د

ل2 = 1375 − 25 د

ب) وضح أثر إضافة قطاع حكومي حيث ح = 920 ، ض = 0.20 د على القيم التوازنية .

ج) وضح الأثر المترتب على زيادة عرض النقود بمقدار 45.75 وحدة على القيم التوازنية الواردة بالنقطة السابقة .

الحـــل : أ) بالتعويض في شرط التوازن في سوق الإنتاج نحصل على :

0.20 د = 1300 − 30 ف

وبالتعويض في شرط توازن سوق النقود نجد أن :

0.25 د = 1125 + 25 ف

وبإعادة صياغة هذين المعادلتين في مصفوفات نجد أن :

$$\begin{bmatrix} 0.20 & 30 \\ 0.25 & 25- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} د \\ ف \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 1125 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قاعدة كرامر نجد أن القيم التوازنية للدخل والفائدة هي :

$$\bar{د} = \frac{\begin{vmatrix} 1300 & 30 \\ 1125 & 25- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.20 & 30 \\ 0.25 & 25- \end{vmatrix}}$$

$$= 5300$$

$$\bar{ف} = \frac{\begin{vmatrix} 0.25 & 1300 \\ 0.25 & 1125 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.20 & 30 \\ 0.25 & 25- \end{vmatrix}}$$

$$= 8$$

ب) تؤدى إضافة القطاع الحكومي الوارد إلى تغير المصفوفات على

النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} (0.16 + 0.80 -1) & 30 \\ 0.25 & 25- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} د \\ ف \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (920 + 1300) \\ 1125 \end{bmatrix}$$

سوف يترتب على إضافة القطاع الحكومي تغير المصفوفات الواردة إلى الصورة :

$$\begin{bmatrix} 0.36 & 30 \\ 0.25 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2220 \\ 1125 \end{bmatrix}$$

حيث يمكن الحصول على القيم التوازنية الجديدة باستخدام قاعدة كرامر أو مقلوب المصفوفة . وستكون القيم الجديدة هي :

$$\text{د} = 5409.1$$

$$\text{ف} = 9.1$$

ج) سوف يترتب على زيادة الكمية المعروضة من النقود تغيير قيمة الصف الثاني في موجه الثوابت على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 0.36 & 30 \\ 0.25 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د} \\ \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2220 \\ 1168.75 \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

المحـــــــددات

يعرف المحدد بأنه مجموعة من الأرقام مرتبة في شكل صفوف وأعمدة بشرط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة فإذا كان المحدد مكون من صفين وعمودين سمى محدد من الرتبة الثانية . أما إذا كان المحدد مكون من ثلاث صفوف وثلاث أعمدة سمى محدد من الرتبة الثالثة وتوضع هذه الأرقام بين خطين متوازيين ويرمز للمحدد بالرمز Δ (دلتا) .

أولا : المحدد من الرتبة الثانية :

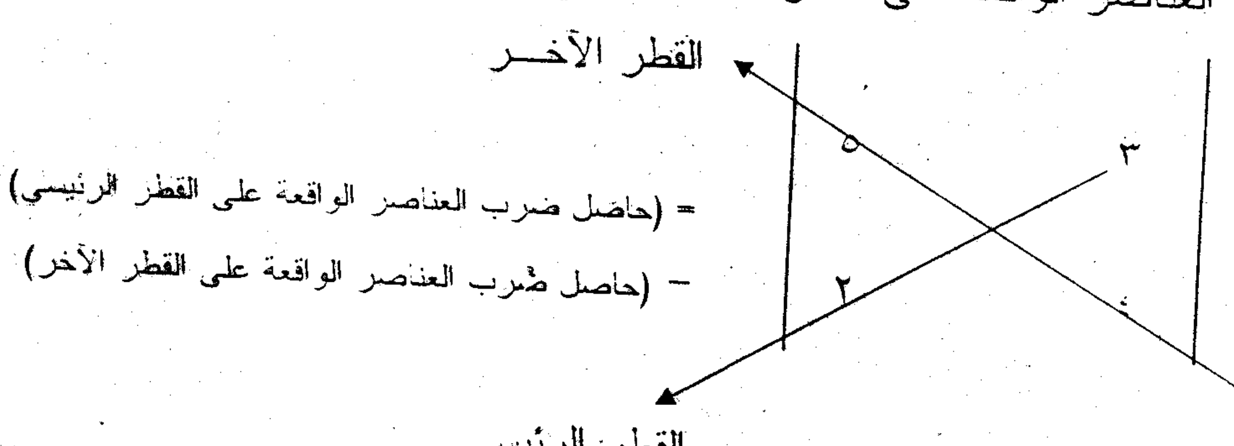
هو محدد مكون من صفين وعمودين وتتوقف إشارة كل عنصر من عناصر المحدد على موقع كل عنصر في المحدد . فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي كانت إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جميع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي كان إشارة العنصر سالبة ويلاحظ أن الرقم الأول يرمز إلى رقم الصف والرقم الثاني يرمز إلى رقم العمود فمثلاً (أ_{11}) يعني أن هذا العنصر يقع في الصف الأول في العمود الأول أما إذا كان (أ_{12}) يعني أن هذا العنصر يقع في الصف الثاني في العمود الأول.

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{vmatrix}$$

وتكون إشارات المحدد متبادلة وفي اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بالإشارة الموجبة كالآتي :

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن كل محدد له قيمة عددية وتتحدد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الثانية بحاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي مطروحا منها العناصر الواقعة على القطر الآخر كما يلي :



= (٣×٢) − (٤×٥)

= ٦ − ٢٠ = − ١٤

مثال ١ :

أوجد قيمة المحدد الآتي :

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -٧ & -٣ \end{vmatrix}$$

الحـــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ -٣ & -٧ \end{vmatrix} = (٥ \times -٧) - (-٣ \times ٤) = -٢٣$$

ثانيا : المحدد من الرتبة الثالثة :

ويتكون هذا المحدد من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر في المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي تكون إشارة العنصر موجبة . أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر المحدد متبادلة في اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتي :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الثالثة بأحد الطريقتين الآتيين :

الطريقة الأولـــــــى :

ويطلق على هذه الطريقة طريقة المحددات الصغرى وبموجـــب هـــذه الطريقة يتم اختيار أي صف أو أي عمود ويتم ضرب كل عنصر بإشارته من عناصر هذا الصف أو العمود في المحدد الأصغر لهذا العنصر ويـــتم إيجـــاد المحدد الأصغر بأن نحذف الصف والعمود الواقع فيه العنصر والباقي يســـمى المحدد الأصغر لهذا العنصر . ويتضح ذلك من المثال التالي :

مثال ٢ :

أوجـــد قيمة المحـــدد الآتـــــي :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحـــــل

أوجد قيمة المحدد الآتـــــي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} + & - & + \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٤ (-٨-٤٣) -٥ (-١٢-٣٥) -٣ (١٨-١٠)

= ٤ × -٥٠ - ٥ × -٤٧ = ٣ × ٨

= -٢٠٠ + ٢٣٥ - ٢٤

= -٢٢٤ + ٢٣٥ = ١١

الطريقة الثانيـــــــة :

وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر الأقطار الموجبة والأقطار السالبة . حيث يتم تكرار العمود الأول والعمودّ الثاني للمحدد المطلوب إيجاد قيمتـــه أو تكرار الصف الأول والثاني . ويلاحظ أن الأقطار المتجهة إلى أســف تمثــل الأقطار الموجبة أما الأقطار المتجهة إلى أعلى تمثل الأقطار السالبة والأمثلــة التالية توضح كيفية إيجاد قيمة المحدد :

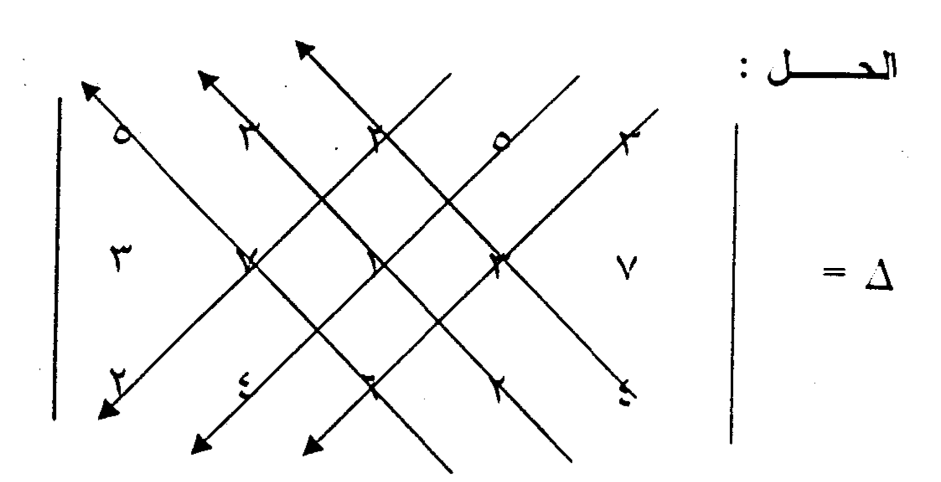
مثال ٤ :

أوجد قيمة المحدد الآتـــــي :

٣	٥	٢
٧	٣	١
٤	٢	٦

الحـــل :

Δ =



Δ = [(٦×٣×٣) + (٥×١×٤) + (٢×٧×٢)] − [(٤×٣×٢) + (٢×١×٣) + (٦×٧×٢)]

= [٥٤+٢٠+٢٨ − ٢٤ + ٦ + ٢١٠]

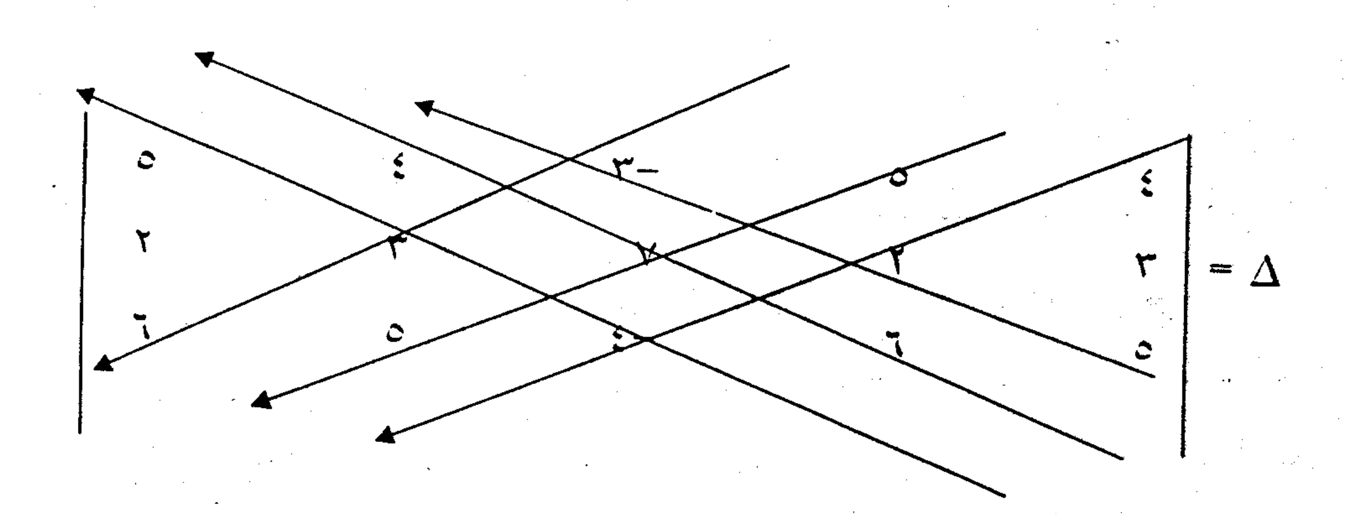
= ١٠٢ − ٢٤٠ = ١٣٨

مثال ٥ :

أوجد قيمة المحدد الآتـــــي :

٢-	٥	٤
٧	٢	٣
٤-	٦	٥

الحـــــل :



$$\Delta = \left[(٤\times٢\times-٤) + (٥\times٧\times٥) + (-٣\times٣\times٦)\right] - \left[(٥\times٢\times-٣) + (٦\times٧\times٤) + (-٤\times٣\times٥)\right]$$

$$= \left[-٣٢ + ١٧٥ - ٥٤\right] - \left[-٣٠ + ١٦٨ - ٦٠\right]$$

$$= \left[٨٩\right] - \left[٧٨\right] = ١١$$

المحدد من الرتبة الرابعة :

ويتكون هذا المحدد من أربعة صفوف وأربعة أعمدة .

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} & أ_{٤١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & أ_{٤٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & أ_{٤٣} \\ أ_{١٤} & أ_{٢٤} & أ_{٣٤} & أ_{٤٤} \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر في المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجي تكون إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردي تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر المحدد متبادلة في اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتي :

$$\begin{vmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الرابعة كما يلي :

مثال ٦ :

أوجد القيمة العددية للمحدد الآتـــي :

$$\begin{vmatrix} - & + & - & + \\ ٤ & ٢ & ٥ & ٢ \\ ٦ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحـــل :

$$\Delta = ٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٧ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ ٧ & ٤ & ٦ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

ثم يتم ايجاد قيمة كل محدد من المحددات السابقة بأي طريقة سواء بطريقة المحددات الصغرى أو بطريقة الأقطار حيث :

$$\Delta_{١} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٦ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٧ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \left[(١٤ + ١٢ + ٧٢) - (١٢ + ١٦ + ٦٣) \right]$$

$$= ٣ \left[(٩٨) - (٩١) \right]$$

$$= ٣ \times ٧ = ٢١$$

$$\Delta_{٢} = -٥ \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٦ \\ ٥ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} = -٥ \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٦ & ٧ & ٣ \\ ٥ & ١ & ٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٧ & ٦ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= -٥ \left[(٤٩ + ٣٦ + ١٢٠) - (٣٦ + ٥٦ + ١٠٥) \right]$$

$$= -٥ \left[(٢٠٥) - (١٩٢) \right]$$

$$= -٥ \left[١٣ \right] = -٦٥$$

Δ٣ = −٣ | ٧ ٢ ٦ | ٥ ٣ ٢ | ٦ ٢ ٧ | = ٢ | ٧ ٢ ٦ ٧ ٢ | ٥ ٣ ٢ ٥ ٣ | ٦ ٢ ٧ ٦ ٢ |

= ٢ [(١٤٧+٢٤+٦٠) − (١٠٨+٢٨+٧٠)]

= ٢ [(٢٣١) − (٢٠٦)]

= ٢ [٢٥] = ٥٠

Δ٤ = −٤ | ٧ ٢ ٣ | ٥ ٣ ١ | ٦ ٢ ٤ | = −٤ | ٧ ٢ ٣ ٧ ٢ | ٥ ٣ ١ ٥ ٣ | ٦ ٢ ٤ ٦ ٢ |

= − ٤ [(٨٤+١٢+٣٠) − (٥٤+١٤+٤٠)]

= − ٤ [(١٢٦) − (١٠٨)]

= − ٤ ١٨ = − ٧٢

إذاً قيمة المحدد = ٢١ − ٦٥ + ٥٠ − ٧٢ = −٦٦

ثالثا : استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية :

(أ) المعادلات الخطية ذات المجهولين :

بفرض أن لدينا المعادلتين الخطيتين الآتيين :ـ

$أ_{١} س + ب_{١} ص = ل_{١}$ .... (١)

$أ_{٢} س + ب_{٢} ص = ل_{٢}$ .... (٢)

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} \qquad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta}$$

حيث Δ هو محدد مكون من معاملات س ، ص في المعادلتين وهو مقام لكل من س ، ص .

أما Δ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضع بدلا منها الحدود المطلقة .

أما Δ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ص ووضع بدلا منها الحدود المطلقة .

$$إذا\ س = \frac{\begin{vmatrix} ل_{١} & ب_{١} \\ ل_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ل_{١} & ب_{١} \\ ل_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}} \qquad ص = \frac{\begin{vmatrix} ل_{١} & ب_{١} \\ ل_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ل_{١} & ب_{١} \\ ل_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}}$$

إذا $س = \dfrac{(ل_١ ب_٢ - ل_٢ ب_١)}{(أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١)}$ ، $ص = \dfrac{(أ_١ ل_٢ - أ_٢ ل_١)}{(أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١)}$

مثال ٧ :

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :

$٣ س - ٢ ص = ٥$

$٤ س + ص = ١٤$

الحــــل

$س = \dfrac{\Delta س}{\Delta}$ $ص = \dfrac{\Delta ص}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - (-٢ \times ٤) = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ١٤ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - (-٢ \times ١٤) = ٥ + ٢٨ = ٣٣$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ١٤ \end{vmatrix} = ٤٢ - ٢٠ = ٢٢$$

إذا س = $\frac{\Delta \text{س}}{\Delta}$ = $\frac{٣٣}{١١}$ = ٣

ص = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta}$ = $\frac{٢٢}{١١}$ = ٢

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص في أحد المعادلتين :

٣ س – ٢ ص = ٥

٣ × ٣ – ٢ × ٢ = ٥

٥ = ٥

مثال ٨ :

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :

٨ س + ٢ ص = ٤

٥ س + ٢ ص = ١

الحـــل

س = $\frac{\Delta \text{س}}{\Delta}$ ص = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١٦ - ١٠ = ٦$$

$$\Delta \text{س} = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ - ٢ = ٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٨ - ٢٠ = -١٢$$

$$\text{إذا س} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٦}{٦} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص في أحد المعادلتين :

٨ س − ٢ ص = ٤

٨ × ١ + ٢ × −٢ = ٤

٤ = ٤

مثال ٩ :

أوجد باستخدام المحددات قيمة كل من س ، ص :

٣ س + ٤ ص = ٥

٥ س + ٧ ص = ١

الحــــل :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١ - ٢٠ = ١$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} = ٣٥ - ٤ = ٣١$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - ٢٥ = ٢٢$$

إذا $\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{٣١}{١} = ٣١$

$\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{-٢٢}{١} = ٢٢$

(ب) المعادلات الخطية ذات الثلاث مجاهيل :

بفرض أن لدينا المعادلات الآتيـــــة :ـــ

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ ع = ل_١$ ⟵ (١)

$أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ ع = ل_٢$ ⟵ (٢)

$أ_٣ س + ب_٣ ص + حـ_٣ ع = ل_٣$ ⟵ (٣)

وبحل المعادلات السابقة نجد أن : ،

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} \qquad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} \qquad ع = \frac{\Delta ع}{\Delta}$$

حيث Δ هو محدد مكون من معاملات س ، ص ، ع في المعادلات الثلاث و هو مقام لكل من س ، ص ، ع .

أما Δ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضع الحدود المطلقة.

أما Δ ص هو نفس محدد المقام بعد حذف معـــاملات ص ووضـــع الحـــدود المطلقة.

أما Δ ع هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ع ووضع الحدود المطلقة .

$$\text{إذا س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ب}_1 & \text{ل}_1 \\ \text{ح}_2 & \text{ب}_2 & \text{ل}_2 \\ \text{ح}_3 & \text{ب}_3 & \text{ل}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ح}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ح}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{vmatrix}} \qquad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ل}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ح}_2 & \text{ل}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ح}_3 & \text{ل}_3 & \text{أ}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ح}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ح}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{vmatrix}} \qquad \text{ع} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ح}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ح}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{vmatrix}}$$

مثال ١٠ :

باستخدام المحددات أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع من المعادلات الآتية :

٣س − ٢ ص + ع = ٢ ⟵ (١)

س + ٢ ص − ٢ ع = ١ ⟵ (٢)

٤ س − ٥ ص + ٤ ع = ٦ ⟵ (٣)

الحـــل :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\left[(٨ - ٣٠ + ١٢) - (٥ - ١٦ + ٣٦)\right] =$$

$$١٣ =$$

$$\begin{vmatrix} ٢- & ٢ & ١ & ٢- & ٢ \\ ٣ & ١ & ٢- & ٣ & ١ \\ ٥- & ٦ & ٤ & ٥- & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢- & ٢ \\ ٢- & ٣ & ١ \\ ٤ & ٥- & ٦ \end{vmatrix} = \Delta\ س$$

$$\left[(٨ - ٢٠ + ١٨) - (٥ - ٢٤ + ٢٤)\right] =$$

$$١٣ =$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٢- & ١ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٤ & ٦ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢- & ١ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta\ س$$

$$\left[(٨ + ٣٦ - ٤) - (٦ + ١٦ - ١٢)\right] =$$

$$٢٦ =$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٦ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{matrix}$$

$$= \left[(٥٤ - ٨ - ١٠) - (٢٤ - ١٥ - ١٢) \right]$$

$$= \left[٣٦ + ٣ = ٣٩ \right]$$

$$\text{إذا س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{٣٩}{١٣} = ٣$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص ، ع في أحد المعـــادلات السابقة .

٣ س − ٢ ص + ع = ٢

٣ × ١ − ٢ × ٢ + ٣ = ٢

٢ = ٢

الفصل الخامس

اللوغاريتمات

اللوغاريتمات طريقة لتبسيط العمليات الحسابية حيث أن من خواص اللوغاريتمات تحويل عمليات الضرب والقسمة إلى عمليات جمع وطرح ويرمز للوغاريتم بالرمز لو "log" ويحسب اللوغاريتم لأساس معين يسمى أساس اللوغاريتم . والعدد ١٠ هو أفضل عدد يختار كأساس للوغاريتم ويكتب على الصورة لو ١٠ وعادة ما يشطب الرقم ١٠ من أساس اللوغاريتم للتبسيط حيث أن الجداول الخاصة باللوغاريتمات قد حسبت للأساس ١٠ وبالتالي فإنه إذا شاهدنا الرمز "لو" بدون أساس يعني ذلك أن اللوغاريتم للأساس ١٠ .

أولا : تعريف اللوغاريتم

لوغاريتم العدد هو الأس الذي إذا رفع إليه الأساس نتج العدد ، فإذا كان الأساس ١٠ فمعنى ذلك أن لوغاريتم العدد هو الأس الذي إذا رفعت إليه الـ ١٠ كان مساوياً للعدد أي أن :

لو ١٠ = ١ ⟵ $(١٠)^{١}$ = ١٠

لو ١٠٠ = ٢ ⟵ $(١٠)^{٢}$ = ١٠٠

لو ١٠٠٠ = ٣ ⟵ $(١٠)^{٣}$ = ١٠٠٠ وهكذا

وجميع الأعداد التي تتراوح بين الـ ١٠ والـ ١٠٠ فإن لوغاريتمها يتراوح بين الواحد والاثنين . وجميع الأعداد التي تتراوح بين المائة والألف يتراوح لوغاريتمها بين الاثنين والثلاثة ... وهكذا .

وتوجد جداول توضح قيمة اللوغاريتم يمكن عن طريقها إيجاد قيمة اللوغاريتم ، وسيتضح كيفية استعمال اللوغاريتمات من الأمثلة التالية :

أمثلة :

١ - أوجد لوغاريتم العدد ٢٥

الحل :

لو ٢٥ = ١,٣٩٧٩

حصلنا على هذا الرقم من الجداول حيث بدأنا أولاً بتحديد ما يسمى بالعدد البياني والعدد البياني هو عدد يقل بواحد صحيح عن عدد الأرقام الصحيحة في العدد المطلوب إيجاد لوغاريتمه . وحيث أن العدد ٢٥ يتكون من رقمين فالعدد البياني له يساوي ١ ثم نبحث في جداول اللوغاريتمات عن الرقم ٢٥ تحت عمود الصفر .

ومعنى أن لو ٢٥ = ١,٣٩٧٩ هو أن $(١٠)^{١,٣٩٧٩}$ = ٢٥

٢ - أوجد لوغاريتم العدد ٦٧٤٩

نبدأ أولاً بتحديد العدد البياني وهو ٣ حيث أن العدد المطلوب إيجاد لوغاريتم له يتكون من أربعة أرقام ثم نكشف في جداول اللوغاريتمات عن ٦٧ تحت الـ ٤ فروق ٩ أي نكشف عن أول رقمين تحت الرقم الثالث ونضيف الفروق المناظرة للرقم الرابع .

فنجد أن : لو ٦٧٤٩ = ٣,٨٢٩٣

ومرة أخرى هذا يعني أن $(١٠)^{٣,٨٢٩٣}$ = ٦٧٤٩

٣ – أوجد لوغاريتم العدد ٤,٥١٧

نبدأ بتحديد العدد البياني وهو يساوي صفرا وذلك لأنــه يوجــد رقــم صحيح واحد في العدد المطلوب إيجاد لوغاريتم له ثم نكشف عــن ٤٥ تحــت الواحد فروق ٧ ويكون :

لــو ٤,٥١٧ = ٠,٦٥٣٩

أي أن $(١٠)^{٠,٦٥٣٩}$ = ٤,٥١٧

٤ – أوجد لوغاريتم العدد ٠,٥٢٣٤

العدد البياني في هذه الحالة هو – ١ وذلك لأنه لا توجد أرقام صحيحة ثم نكشف عن ٥٢ تحت ٣ فروق ٤ .

لــو ٠,٥٢٣٤ = ١,٧١٨٨ = ٠,٢٨١٢

$(١٠)^{-٠,٢٨١٢} = \frac{١}{٠,٢٨١٢} = ٠,٥٢٣٤$

٥ – أوجد لوغاريتم العدد ٠,٠٤١٧

العدد البياني في هذه الحالة هو – ٢ لأنه ليس فقــط لا توجــد أرقــام صحيحة ولكن أيضاً يوجد صفراً على يمين العلامة العشرية ، ثم نكشف عــن ٤١ تحت أل ٧

لــو ٠,٠٤١٧ = ٢,٦٢٠١ = – ١,٣٧٩٩

إذا $(١٠) - ١,٣٧٩٩ = \frac{١}{(١٠)^{١,٣٧٩٩}} = ٠,٠٤١٧$

٦ - أوجد لوغاريتم العدد ٠,٠٠٥٧

العدد البياني = - ٣ ثم نكشف عن ٥٧

لو ٠,٠٠٥٧ = ٣,٧٥٥٩ = - ٢,٢٤٤١

وذلك يعني أن :

(١٠)$^{-٢,٢٤٤١}$ = ٠,٠٠٥٧

ولبيان كيفية استخدام اللوغاريتمات في تيسير العمليات الحسابية يجب أن نعترف مقدما على بعض خواص اللوغاريتمات والتي منها أنها تحول عمليات الضرب والقسمة إلى جمع وطرح كما يلي :

ثانيا : خواص اللوغاريتمات :

(١) لو أ ب = لو أ + لو ب

(٢) لو $\frac{أ}{ب}$ = لو أ - لو ب

(٣) لو أ^{ب} = ب لو أ

(٤) لو ١ = صفر

وسيتضح كيفية تبسيط العمليات الحسابية باستخدام هذه القوانين من الأمثلة التالية :

- مثال (٧) أوجد $\sqrt[٥]{٧١٨}$

- الحل :

$\sqrt[٥]{٧١٨} = (٧١٨)^{\frac{١}{٥}}$

لو $\sqrt[٥]{٧١٨}$ = لو $(٧١٨)^{\frac{١}{٥}}$

= لو ٧١٨ = $\frac{١}{٥}$ × ٢,٨٥١٦ = ٠,٥٧١٢٢

ثم نكشف في جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات عـن ٠,٥٧ تحـت الواحد فروق ٢ فنجد أنه ٣٧٢٦ وحيث أن العدد البياني في الجواب السابق كان صفرا فإن ذلك يعني أنه يجب أن يكون لدينا في الأصل رقم صـحيح واحـد فنضع العلامة العشرية يمين الـ ٣ ويكون :

$\sqrt[٥]{٧١٨}$ = ٣,٧٢٦

- **مثال (٨)** أوجد قيمة $\frac{(٢٥,١٣)^{٧,٤} \times (١٢١,٣)^{٢,١}}{\sqrt[٣]{٥٢٤١} \times (٣٣,٥)}$

- **الحـــل :**

نفرض أن المقدار = ص

ص = $\frac{(٢٥,١٣)^{٧,٤} \times (١٢١,٣)^{٢,١}}{٥٢٤١ \times (٣٣,٥)^{٨}}$

لو ص = لو البسط – لو المقام =

لو $(٢٥,١٣)^{٧,٤}$ + لو $(١٢١,٣)^{٢,١}$ – لو $(٣٣,٥)^{٨}$ – لو $\sqrt[٣]{٥٢٤١}$

= ٧,٤ لو ٢٥,١٣ + ٢,١ لو ١٢١,٣ – ٨ لو ٣٣,٥ – $\frac{١}{٣}$ لو ٥٢٤١

= ٧٤. × ١,٤٠٠٢ ÷ ٢,١ × ٢,٠٨٣٨ – * × ١,٥٢٥٠

$- \quad ١/٣ \quad \times ٣,٧١٩٤$

$= ١٠,٣٦١٤٨ + ٤,٣٧٥٩٨ - ١٢,٢ - ١,٢٣٩٨$

$= ١٤,٧٣٧٤٦ - ١٣,٤٣٩٨ = ١,٢٩٧٧٠$

إذا لو ص = ١,٢٩٧٧ إذاً ص = ١٩,٨٥

كشفنا في جدول الأعمال المقابلة للوغاريتمات عن ٠,٢٩ تحت أل ٧ فروق ٧ وجدنا الرقم ١٩٨٥ ، وحيث أن العدد البياني واحد فيكون عدد الأرقام الصحيحة ٢ وبالتالي يكون الجواب ١٩,٨٥ .

مثال (٩)

باستخدام اللوغاريتمات أوجـــد :

(أ) $\sqrt[٣]{١٠١}$ ب $\sqrt[٣]{٦٧٥}$ ج $\sqrt[٣]{٢١٠}$

الحـــل :

نفرض أن س = $\sqrt[٣]{١٠١}$

بأخذ لوغاريتمات الطرفين

إذا لو س = لو $\sqrt[٣]{١٠١}$ = $\frac{١}{٣}$ لو ١٠١ = $\frac{١}{٣} \times ٢,٠٠٤٣ = ٠,٦٦٨١$

بالبحث في جدول الأعداد المقابلة نجد أن :

$$س = ٤,٦٥٧$$

(ب) نفرض أن $ع = \sqrt[٦]{٦٧٥}$ بأخذ لوغاريتمات الطرفين

$$لو\ ع = لو \sqrt[٦]{٦٧٥} = \frac{١}{٦} \times ٢,٨٣٩٣ = ٠,٤٧١٦$$

$$العدد\ المقابل\ ع = ٢,٩٦٢$$

(ج) نفرض أن $م = \sqrt[٧]{٢١٠}$ بأخذ لوغاريتمات الطرفين

$$لو\ م = لو \sqrt[٧]{٢١٠} = \frac{١}{٧}\ لو\ ٢١٠ = \frac{١}{٧} \times ٢,٣٢٢٢ = ٠,٣٣١٧$$

$$العدد\ المقابل\ م = ٢,١٤٧$$

الفصل السادس

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

أولاً : التغير والمتغير

تتسم الظواهر الطبيعية بطابع التغير بمعنى أن البيانات التي نجمعها عن ظاهرة ما قد لا تكون متشابهة بل تكون مختلفة متغيرة فعند دراسة ظاهرة كظاهرة الحرارة في بلد ما في يوم ما قد نقيس درجة الحرارة كل ساعة مثلاً فنحصل على ٢٤ مشاهدة ، هذه المشاهدات تكون غالباً مختلفة عن بعضها البعض لأن الحرارة تتغير من وقت إلى آخر . وإذا رمزنا بالرمز س لهذه الظاهرة فإن هذا الرمز يعبر عن أي درجة من هذه الدرجات دون أن يخصص درجة معينة منها ونقول حينئذ أن س متغير نطاقه مجموعة درجات الحرارة التي لدينا ، وبصفة عامة نقول أن المتغير هو رمز يعبر عن أي عنصر من عناصر مجموعة معطاة .

وهناك علاقات بين أزواج من المتغيرات كما هو الحال مثلاً في العلاقة بين طول ضلع المربع (س) ومساحته (ص) ويمكن عمل معادلة $ص = س^{٢}$ ، وهذه المعادلة تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س ، ص ويسمى المتغير س بالمتغير المستقل ويسمى المتغير ص بالمتغير التابع .

فإذا كانت كل قيمة لـ س تعطي قيمة وحيدة فقط ل ص تسمى العلاقة السابقة دالة ونقول ص دالة في س وتكتب رمزياً ص = د (س) .

التغير :

إذا ارتفعت درجة الحرارة في أحد الأيام من ٢٠° إلى ٢٥° يقال أن هناك تغير في درجة الحرارة قدره ٥ درجات مئوية ، فإذا رمزنا إلى درجة الحرارة بالرمز س مثلاً فإن التغير في س = ٢٥ – ٢٠ = ٥ . أي أن التغير في س = قيمة س بعد التغير – قيمة س الأصلية ، وإذا رمزنا للتغير في س بالرمز Δ س يمكن كتابة العبارة السابقة هكذا Δ س = قيمة س بعد التغير – قيمة س الأصلية .

ثانيا : متوسط التغير

إذا كانت ص دالة في س فإن كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص وعلى ذلك إذا تغيرت س تغيرت تبعاً لذلك قيمة ص وهذا يعني أن التغير Δ س في س يتعبه تغير Δ ص في ص والنسبة $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ تعرف بأنها متوسط تغير الدالة ص بالنسبة إلى س ، ويعرف معدل تغير الدالة ص بالنسبة إلى س بأنه نها Δس ← صفر $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ ويسمى بالمعامل التفاضلي الأول للدالة ص بالنسبة إلى س أو المشتقة التفاضلية الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س ونرمز له بالرمز $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}$ أو د (س) أو ص

بناءا على هذا التعريف فإن $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}$ نهـا Δ ← صفر $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

ثالثاً : إيجاد المشتقة الأولى للدالة ص = د (س)

ص = د (س) ⟵ (١)

عندما تتغير س إلى س + Δ س فإن ص تتغير إلى ص + Δ ص

وتصبح (١) على الصــورة

ص + Δ ص = د (س + Δ س) ⟵ (٢)

ويطرح (١) من (٢) ينتج أن

Δ ص = د (س + Δ س) − د (س) ⟵ (٣)

بقسمة الطرفان على ٨ س

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{د (س + } \Delta \text{ س) − د (س)}}{\Delta \text{ س}} \longleftarrow (٤)$$

وبأخذ نهايتي الطرفين عندما Δ س ⟵ صفر ينتج أن

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = \text{نها } \Delta \text{ س} \leftarrow \text{صفر } \frac{\text{د (س + } \Delta \text{س) − د (س)}}{\Delta \text{ س}} \longleftarrow (٥)$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة المبادئ الأولية لإيجاد المشتقة الأولى .

– **مثال (١)** بالمبادئ الأولية أوجـــد معدل تغير ص بالنســـبة إلى س للدالة

ص = س ^{٢} + ٥ س

الحــــــل :

ص = س ^{٢} + ٥ س ⟵ (١)

ص + Δ س = (س + Δ س)^{٢} + ٥ (س + Δ س)

= س^{٢} + ٢ س Δ س + (Δ س)^{٢} + ٥ س + ٥ Δ س ⟵ (٢)

بقسمة الطرفان على Δ س $\frac{\text{Δ ص}}{\text{Δ س}}$ = ٢ س + Δ س + ٥

نها د س ⟵ صفر $\frac{\text{Δ ص}}{\text{Δ س}}$ = نها د س ⟵ صفر ٢ س + Δ س + ٥

إذاً $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س + ٥

أي أن معدل تغير ص بالنسبة إلى س هو ٢ س + ٥

– **مثال (٢)** : أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ دَ (س) للدالة ص = س^{٣} + ٤ س^{٢}

الحـــــل :

$$ص + Δص = (س + Δس)^{٣} + ٤(س + Δس)^{٢}$$

$$= س^{٣} + ٣س^{٢}Δس + ٣س(Δس)^{٢} + (Δس)^{٣} +$$

$$٤س^{٢} + ٨سΔس + ٤(Δس)^{٢}$$

بطرح المعادلة الأصلية و القسمة على Δ س

$$\frac{Δص}{Δس} = ٣س^{٢} + ٣سΔس + (Δس)^{٢} + ٨س + ٤(Δس)$$

$$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٨س$$

رابعاً : قواعـــد التفاضـــل

قاعدة (١)

المشتقة الأولى للدالة ص = $س^{ن}$

إذا كانت ص = $س^{ن}$ فإن $\frac{دص}{دس} = ن\,س^{ن-١}$

ومن النظرية السابقة نستنتج أن :

إذا كانت ص = س فإن $\frac{دص}{دس} = ١$

إذا كانت ص = $س^{٢}$ فإن $\frac{دص}{دس} = ٢ \times س^{٢-١} = ٢س$

إذا كانت ص = س ^{٣} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ × س $^{٣-١}$ = ٣ س ^{٢}

قاعدة (٢)

مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث جـ عدد ثابت

فإن $\frac{د ص}{د س}$ يساوي صفر

فمثلاً $\frac{د (٧)}{د س}$ = صفر $\frac{د}{د س}$ (-٨) = صفر

قاعدة (٣) :

مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة :

إذا كانت ص = جـ س ن حيث ج عدد ثابت

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = جـ × ن س $^{ن-١}$

قاعدة (٤) :

مشتقة حاصل ضرب دالتين :

إذا كانت ص = ع × ف حيث ع ، ف دالتين في س

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ع × $\frac{د ف}{د س}$ + ف × $\frac{د ع}{د س}$

أي أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى

- مثال (٣)

إذا كانت ص = (س٢ + ٥) (س٢ + ٧) أوجـد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

- الحـــل :

ص = (س^{٢} + ٥) (س^{٣} + ٧)

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (س^{٢} + ٥) × ٣س^{٢} + (س^{٣} + ٧) × ٢س

= ٣ س^{٤} + ١٥ س^{٢} + ٢ س^{٤} + ١٤ س

= ٥ س^{٤} + ١٥ س^{٢} + ١٤ س

- مثال (٤) :

إذا كانت ص = (س٢ + ٣ س − ١) (٣ س٢ − س + ١) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

- الحـــل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ =

(س٢ + ٣س −١) × (٦س − ١) + (٣س٢ − س +١) × (٢ س +٣)

٦س^{٢} + ١٨ س^{٢} − ٦ س − س^{٢} − ٣ س + ١ + ٦ س^{٢} −٢س^{٢} + ٢ س +

٩س^{٢} −٣س −٣

= ١٢ س^{٢} + ٢٤ س^{٢} − ١٠ س − ٢

قاعدة (٥) :

مشتقة خارج قسمة الدالتين :

إذا كانت ص = $\frac{\text{ع}}{\text{ق}}$ حيث ع ، ق دالتين في سي ، ق (س) ≠ صفر

$$\text{فإن } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ق} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} - \text{ع} \frac{\text{د ق}}{\text{د س}}}{\text{ق}^{٢}}$$

$$\text{أي أن } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقـــام}}$$

- **مثال (٥)** أوجــد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٥}$

الحـــــل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{(س٢ + ٥)} \times \text{٢ س} - \text{(س٢ + ٣)} \times \text{٢ س}}{\text{(س٢ + ٥)}^{٢}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٤ س}}{\text{(س٢ + ٥)}^{٢}}$$

مثال (٦)

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

الحـــــل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(\text{س}^{٢} + ١) \times ٣\text{س}^{٢} - (\text{س}^{٣} - ١) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}{\text{(س٢ + ١)}^{٢}}$$

مثال (٧) :

أوجـــد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت ص = $\frac{١ + س^{٢}}{١ - س^{٢}}$

الحـــل :

$$ص = \frac{١ + س^{٢}}{١ - س^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(١ - س^{٢}) \times ٢ س - (١ + س^{٢}) \times - ٢س}{(١ - س^{٢})^{٢}}$$

$$= \frac{٢ س (١ - س^{٢} + ١ + س^{٢})}{(١ - س^{٢})^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤ س}{(١ - س^{٢})^{٢}}$$

قاعدة (٦)

مشتقة دالة الدالة

إذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر (س) تكون

ص = د (ر "س")

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

مثال (٨) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كانت ص = $(\text{س}^{٥} + ١)^{١٨}$

الحـــل :

بفرض ع = $\text{س}^{٥} + ١$

إذاً ص = $\text{ع}^{١٨}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٨ \ \text{ع}^{١٧} \quad ، \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٥ \ \text{س}^{٤}$$

أي $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = ١٨ \ (\text{س}^{٥} + ١)^{١٧}$

وبالتالي $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٨ \ (\text{س}^{٥} + ١)^{١٧} \times ٥ \ \text{س}^{٤}$

نتيجـــــة :

إذا كانت ص = $\text{ع}^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن} \times \text{ع}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

مثــال (٩) :

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كانت ص = $(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥س} - \text{٢})^{\text{٦}}$

الحـــل :

$$\text{ص} = (\text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٢})^{\text{٦}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (\text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٢})^{\text{٥}} \times (\text{٦ س} + \text{٥}) .$$

$$= \text{٦} \, (\text{٦س} + \text{٥}) \, (\text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٢})^{\text{٥}}$$

مثــال (١٠) :

أوجــد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كانت ص = $\left(\frac{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٩}}$

الحـــل :

$$\text{ص} = \left(\frac{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٩}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٩} \left(\frac{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٨}} \times \frac{(\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}) \times \text{٢ س} - (\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}) \times -\text{٢ س}}{(\text{١} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}}$$

$$= \text{٩} \left(\frac{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٨}} \times \frac{\text{٢ س} \, (\text{١} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{١} + \text{س}^{\text{٢}})}{(\text{١} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}}$$

إذاً $\frac{د ص}{د س} = ٣٦ س \times \frac{(١ + س^٢)^٨}{(١ - س^٢)^{١٠}}$

مثال (١١) :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت ص = (س٢ + ١)^٣ × (س٢ + ٤)^٤

الحـــل :

ص = $(س^٢ + ١)^٣ \times (س^٢ + ٤)^٤$

$\frac{د ص}{د س} =$

$(س^٢ + ١)^٣ \times ٤ (س^٢ + ٤)^٢ \times ٢س + (س^٢ + ٤)^٤ \times ٣ (س^٢ + ١)^٢ \times ٢ س$

$٢ س (س^٢ + ١)^٢ (س^٢ + ٤)^٣ \left[٤ (س^٢ + ١) \times ٣ (س^٢ + ٤) \right]$

$= ٢ س (س^٢ + ١)^٢ (س^٢ + ٤)^٣ (٧ س^٢ + ١٦)$

المشتقة الثانيــــــة :

إذا كانت ص = $س^٥ + ٣ س^٢$

فمن الواضح أن $\frac{د ص}{د س} = ٥ س^٤ + ٦ س$

وبالنظر إلى الناتج نجد أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ هي أيضاً دالة في س وإذا أجرينا عملية التفاضل مرة أخرى نحصل علـــى :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \right) = \text{٢٠ س ٣ + ٦}$$

ويســمى الناتج بالمشتقة الثانية للدالـــة ص بالنســبة إلـى س ويرمــز لــه

بالرمــز $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}$ أو ص̋ أو د̋ = (س)

وبالمثل إذا أجرينا عملية التفاضل مرة ثالثة نحصــل علــى المشــتقة

الثالثــة $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{٦ س}^{\text{٢}}$

وبصفة عامة إذا كانت ص دالة في س يمكننا الحصول على المشــتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا على التوالي باستخدام قواعــد التفاضل السابق ذكرها .

مثال (١٢) : إذا كانت ص = ٣ س٣ – ٤ س ٢

فأوجد $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}$ عندما س = ١

الحـــــل :

ص = ٣ س٢ – ٤ س٢

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٩ س٢ – ٨ س ، $\frac{\text{د ٢ص}}{\text{د س ٢}}$ = ١٨ س – ٨

عندما س = ١

إذاً $\frac{\text{د ٢ / ص}}{\text{د س٢}}$ = ١٨ × ١ – ٨ = ١٠

مثال (١٣) :

إذا كانت ف = ٤ ن٢ + ١٢ ن٢ – ٥ ن

فأوجـــــد $\frac{\text{د ٢ ف}}{\text{د ن}^{٢}}$ عند ن = ٢

الحـــــل :

ف = ٤ ن ٢ + ١٢ ن^{٢} – ٥ ن

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ١٢ ن^{٢} + ٢٤ ن – ٥

$\frac{\text{د ٢ ف}}{\text{د ن ٢}}$ = ٢٤ + ٢٤

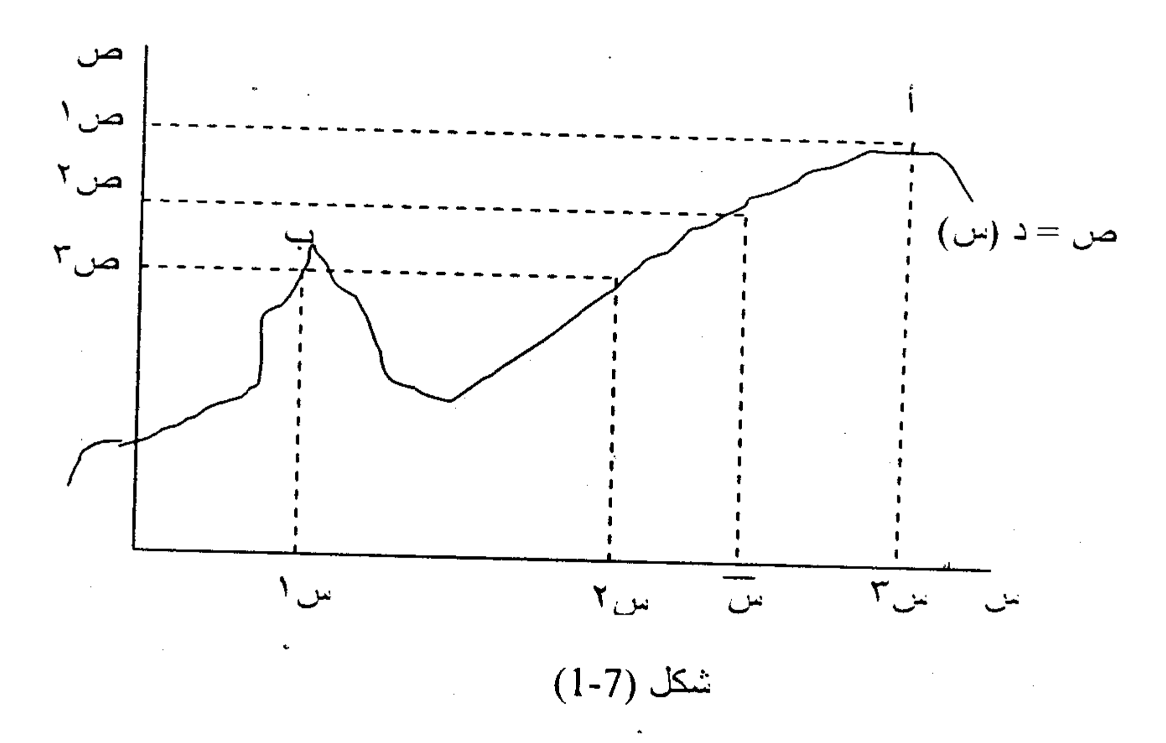
عند ن = ٢

$$\frac{د^٢ ف}{د ن^٢} = ٢٤ \times ٢ + ٢٤$$

$$= ٤٨ + ٢٤ \quad = \quad ٧٢$$

خامساً : الدوال ذات المتغير الواحد

إذا كانت الدالة وحيدة المتغير فإنه يمكن حساب نقطة القيمة العظمى (أو الدنيا) لها بالطريقة المعتادة بدون الرجوع إلى القيود الواردة عليها ، ثم نقارن بين القيمة المحسوبة وبين القيود الواردة ، فإذا ما استوفت القيمة المحسوبة تلك القيود فسوف تبلغ الدالة تلك النقطة ، أما إذا لم تستوفى القيمة المحسوبة القيود الواردة فإن قيمتها (أي قيمة الدالة) تتحدد بناء على القيود . فإذا كانت ص = د (س) ، على سبيل المثال ، والمطلوب تحديد نقطة بلوغها قيمة عظمى مع اشتراط أن تساوي أو أن تقل س عن عشر وحدات ووجدنا أن الدالة تحقق نقطة قيمة عظمى عند س = ٨ ، فمن الواضح أن الدالة سوف تبلغ نقطة قيمة عظمى مع استيفائها لقيد الوارد . ومن ناحية أخرى إذا وجدنا أن نقطة بلوغ الدالة السابقة لقيمة عظمى هى س = ١٢ مثلاً ، فهذا يعني أن القيد الوارد ذي فاعلية ، أقصى قيمة للدالة سوف تتحقق عند س = ١٠ في هذا المثال ، بعبارة أخرى أننا لا نحتاج إلى أي أدوات جديدة لتحديد نقاط بلوغ دالة في متغير مستقل واحد نقاط نهاية عظمى أو صغرى ، ولعل الشكل البياني التالي يوضح ما نعنيه .



شكل (7-1)

إذاً كان القيد الوارد على الدالة هو

$$س \leq س_3$$

فأن الدالة سوف تبلغ النقطة "أ" وتحقق القيمة ص٣ أما إذا كان القيد الوارد على الدالة هو أن لا تتجاوز قيمة س القيمة سّ الواقعة بين $س_2$ ، $س_3$ فــأن الدالــة سوف تصل قيمتها إلى $ص_2$ المحدد طبقاً لقيمة $س_2$.

وفي حالة اتخاذ القيد الوارد على الدالة أن تقل قيمة س عن س٢ فــإن ذلك سوف يعود بنا إلى النقطة "ب" وسوف تبلغ الدالة القيمة ص ١ .

سادساً : الدوال المتعددة المتغيرات

وفي حالة اشتمال الدالة على عدد من المتغيرات المستقلة فإن هناك عدة طرق لتحديد القيم العظمى والدنيا لها ، وسوف نعرض طريقة التعويض فــي القسم التالي ثم نتبعها بطريقة لاجرانج وهي الأكثر شيوعاً وعمومية عن طريق التعويض .

٦ – ١ طريقة التعويض

إذا فرضنا أن الدالة التي نسعى لتحديد القيم العظمى أو الدنيا لها هي :

ص = د (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، .... ، س$_ن$)

وذلك باشتراط استيفاء القيد التالي :

ك = و (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ .... ، س$_ن$)

حيث ك مقدار ثابت (ونلاحظ أننا أوردنا قيداً واحداً على الدالة غير أنه لا يوجد ما يمنع من تعدد القيود على أن لا تتجاوز عدد المتغيرات المستقلة الواردة بالدالة) .

فيمكننا طبقاً لطريقة التعويض ، حساب قيمة أحد المتغيرات بدلالة بقية المتغيرات الواردة بالقيد ثم نعوض في دالة الهدف (ص) بالقيمة المحسوبة ثم نتبع الطريقة المعتادة لتحديد نقاط القيم العظمى أو الدنيا .

مثال : أحسب نقطة بلوغ الدالة ص = (س)^2 + (ع)^2 قيمة دنيا بحيث يستوفي القيد التالي وهو :

س + ع = 4

الحـــل : بالتعويض في دالة الهدف بقيمة س المحسوبة من القيد الوارد نجد أن :

ص = (4 ع)^2 + ع^2

= 16 – 8 ع + 2ع^2

أي أن ص دالة في متغير واحد (ع) فقط ولتحقيق نقطة قيمة دنيا لها نساوي المشتقة الأولى لها بالصفر .

ص = − 8 + 4 ع = 0

ع = 2

ومن ثم فإن س = 2

ولتحديد طبيعة نقطة الاستقرار السابقة ، نحسب المشتقة الثانية

ص " = 4

وحيث أن المشتقة الثانية موجبة فإن نقطة الاستقرار السابقة هي نقطة قيمة دنيا للدالة . بصفة عامة إذاً تقوم طريقة التعويض على تحويل دالة الهدف إلى دالة في (ن − 1) من المتغيرات بعد التعويض عن قيمة أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى وذلك باستخدام القيد الوارد على الدالة ثم نطبق الطريقة المعتادة .

٦ − ٢ طريقة لاجرانج

تقوم هذه الطريقة على أساس تكوين دالة جديدة تضم دالة الهدف الأصلية والشروط الواردة عليها بعد ضرب كل من الشروط فيما يعرف بمضاعف لاجرانج ، وتعامل هذه المضاعفات على أنها متغيرات مستقلة في الدالة الجديدة وتتحدد قيم هذه المضاعفات (ويساوي عددها عدد القيود الواردة على الدالة) من خلال الأسلوب أو الطريقة المقترحة فإذا كانت دالة الهدف هي :

ص = د (س$_1$ ، س$_2$ ، س $_3$ ......، س $_ن$)

ونسعى لتحديد نقاط القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة بحيث تكون مستوفية للشرط الوحيد .

$$ك = و\ (س_1 ، س_2 ، س_3 ، \ldots\ldots\ldots ، س_ن)$$

حيث ك كمية ثابتة .

ولا يوجد ما يمنع من تعدد القيود غير أننا سوف نقتصر على حالة ورود قيد واحد على دالة الهدف . نكتب الدالة ف على الصورة .

$$ف = د\ (س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن) + ل\ (ك - و(س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن))$$

حيث "ل" مضاعف لاجرانج .

ونبحث عن القيم العظمى أو الصغرى للدالة "ف" (وهي دالة الهدف مضاف إليها الشرط بعد تحويله إلي صورة صفرية مضروباً في مضاعف لاجرانج) ولتحقيقها يجب استيفاء الشرط اللازم والشرط الكافي وهما على التوالي .

الشـرط اللازم :

أن تبلغ الدالة ف نقطة استقرار ، ويتحقق هذا عند تساوي المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لكل المتغيرات المستقلة الواردة بالدالة وكذلك بالنسبة لمضاعف لاجرانج ، بعبارة أخرى نحسب .

$$ف_1 = د_1 - ل\ و_1 = 0$$

$$ف_2 = د_2 - ل\ و_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$ف_ن = د_ن - ل\ و_ن = 0$$

ويحل هذه المعادلات أنياً نحدد نقطة الاستقرار .

الشرط الكافـــي :

يتطلب هذا الشرط حساب المحددات

$$\left|\bar{\text{هـ}}_{٢}\right| = \begin{vmatrix} \bar{\text{و}}_1 & \text{ف}_{21} & \text{ف}_{11} \\ \bar{\text{و}}_2 & \text{ف}_{22} & \text{ف}_{12} \\ 0 & \bar{\text{و}}_2 & \bar{\text{و}}_1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\text{هـ}_{٣}\right| = \begin{vmatrix} \bar{\text{و}}_1 & \text{ف}_{31} & \text{ف}_{21} & \text{ف}_{11} \\ \bar{\text{و}}_2 & \text{ف}_{32} & \text{ف}_{22} & \text{ف}_{12} \\ \bar{\text{و}}_3 & \text{ف}_{33} & \text{ف}_{23} & \text{ف}_{1} \\ 0 & \bar{\text{و}}_3 & \bar{\text{و}}_2 & \bar{\text{و}}_1 \end{vmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لبقية المحددات إلى أن نصل للمحدد

$$\left|\bar{\text{هـ}}_{\text{ن}}\right| = \begin{vmatrix} \bar{\text{و}}_1 & \text{ف}_{31} & \cdots & \text{ف}_{21} & \text{ف}_{11} \\ \bar{\text{و}}_2 & \text{ف}_{32} & \cdots & \text{ف}_{22} & \text{ف}_{12} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \bar{\text{و}}_{\text{ن}} & \text{ف}_{\text{ن ن}} & \cdots & \text{ف}_{\text{ن}2} & \text{ف}_{\text{ن}١} \\ 0 & \bar{\text{و}}_{\text{ن}} & \cdots & \bar{\text{و}}_2 & \bar{\text{و}}_١ \end{vmatrix}$$

وهــذه المحددات هي المحددات الرئيسية للمصفوفة مع كافة المشتقات الجزئية الأولى للقيد الوارد على الدالة كعمود وكصف .

وحيث أن غالبية التطبيقات الاقتصادية هنا تقتصر على استخدام $|\bar{H}_2|$ فإنه يمكننا القول بأن الشرط الكافي :

+ لتحقق الدالة نهاية صغرى هو

$$0 > |\bar{H}_2|$$

+ لتحقق الدالة نهاية عظمى هو

$$0 < |\bar{H}_2|$$

مثال :

أحسب القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

ت = ٥ س^2 + ٦ ص^2 − س ص

بحيث تستوفى القيد

ص + 0.5 س = 12

الحل :

ف = ٥ س^2 + ٦ ص^2 − س ص + ل (١٢ − ص − ٠,٥ س)

وبحساب المشتقات الجزئية ومساواتها بالصفر نحصل على :

ف $_{س}$ = 10 س − ص − 0.5 ل = 0

ف $_{ص}$ = 12 ص − س − ل = 0

$ف_ر = 12 - ص - 0.5 س \quad = 0$

وبحل هذه المعادلات أنياً أو باستخدام المصفوفات نحصل على :

س = 6 ، ص = 9

ولتحديد طبيعة نقطة الاستقرار نحسب .

$$|\bar{هـ}| = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 12 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 0 \end{vmatrix} = 15.5 > 0$$

أي أنه عند نقطة الاستقرار تبلغ الدالة نقطة نهاية صغرى .

$$ت = 5(6)^2 + 6(9)^2 - (6)(9) = 612$$

سابعاً : تطبيقات اقتصادية على التفاضل

٧ – ١ توازن المستهلك

يسعى الفرد إلى بلوغ أقصى إشباع كلي وذلك في حدود دخله المتاح والأسعار السائدة للسلع . ولنبدأ بمستهلك يستخدم السلعتان ص ، ع اللاتي نفترض أن سعريهما على التوالي $س_ص$ ، $س_ع$.

كما أن دخل المستهلك أو ما يقرر الفرد إنفاقه على هاتين السلعتين هو "م" ، من هذه المعلومات نستطيع صياغة القيد الوارد على المستهلك في الشكل:

$$م = ص . س_ص + ع س_ع$$

وهذا هو ما يعرف بخط الميزانية أو خط الأسعار . ويوضح هذا الخط مجموعات السلعتين التي يمكن للفرد الحصول عليها من دخله المتاح ، وبإعادة صياغة خط الميزانية نجد أن :

$$ص = \frac{م}{س_{ص}} - \frac{س_{ع}}{س_{ص}} ع$$

حيث يوضح الجزء المقطوع من المحور الرأسي ($\frac{م}{س_{ص}}$) عدد الوحدات من السلعة ص التي يمكن للفرد الحصول عليها إذا أنفق دخله بالكامل عليها ، أما عن عدد الوحدات التي يمكن للفرد الحصول عليها من السلعة ع إذا خصص كل دخله للإنفاق عليها فتتحدد بحاصل قسمة الدخل على سعر السلعة ع ، ويوضح هذا العدد نقطة تقاطع خط الميزانية مع المحور الأفقي . فإذا أوصلنا النقطتان السابقتان نحصل على خط يوضح المجموعات المتاحة من السلعتين ويكون ميل هذا الخط ($\frac{-س_{ع}}{س_{ص}}$) أن ميل خط الميزانية هو الأسعار النسبية أي نسبة أسعار السلعتين ، وأنه سالب الميل لكي يوضح أن زيادة عدد الوحدات من سلعة يتطلب تخفيض عدد الوحدات من السلعة الأخرى لثبات الدخل المتاح . من الواضح أن تغير حجم الدخل المتاح يؤدي إلى انتقال خط الميزانية موازياً لنفسه ، أما تغير الأسعار فينعكس في تغير ميل الخط أي يدور الخط حول نقطة تقاطعه مع أحد المحاور .

إذا فرضنا أن دالة المنفعة الكلية التي يحصل عليها المستهلك من استخدامه للسلعتين هي :

$م_ك = د\,(ص ، ع)$

ويسعى الفرد إلى تحديد نقطة قيمة عظمى للدالة السابقة مع ضـــرورة استيفاء قيد الميزانية .

إن استخدام طريقة لاجرانج لتحديد النقطة السابقة يتطلب منـــا تكــوين الدالة "فـ" التالية :

$$ف = د\,(ص ، ع) + ل\,(م - ص\, س_{ص} - ع\, س_{ع})$$

وبمساواة كل المشتقات الجزئية الأولى للدالة "فـ" مع الصفر نحصل على :

$$ف_{ص} = د_{ص} - ل\, س_{ص} \quad = \quad 0$$

$$ف_{ع} = د_{ع} - ل\, س_{ع} \quad = \quad 0$$

$$ف_{ل} = م - ص\, س_{ص} - ع\, س_{ع} = 0$$

وبحل هذه المعادلات آنياً نجد أن :

$$\frac{د_{ص}}{س_{ص}} = \frac{د_{ع}}{س_{ع}} = ل$$

ومنه :

$$\frac{د_{ص}}{د_{ع}} = \frac{د_{ص}}{د_{ع}}$$

أي أن تحقيق الشرط الأول لبلوغ الدالة نقطة قيمة عظمى يتطلب تساوي نسبة المنفعة الحدية لكل سلعة إلى سعرها عبر مختلـف السـلع التـي يسـتخدمها المستهلك .

أما استيفاء الربط الثاني فيتطلب حساب $|\bar{هـ}|$

$$|\bar{هـ}_2| = \begin{vmatrix} ف_{ص ص} & ف_{ص ع} & -م_{ص} \\ ف_{ع ص} & ف_{ع ع} & -م_{ع} \\ -م_{ص} & -م_{ع} & 0 \end{vmatrix}$$

ويجب أن يكون هذا المحدد موجباً للتأكد من بلوغ الدالة قيمة عظمـــى ، أي أن $|\bar{هـ}_2| > 0$.

ولتحديد المدلول الاقتصادي لهذا الشرط ، يمكننا إعادة كتابتـــه علـــى الصورة :

$$\bar{هـ}_2 = \begin{vmatrix} د_{ص ص} & د_{ص ع} & -س_{ص} \\ د_{ع ص} & د_{ع ع} & -س_{ع} \\ -س_{ص} & -س_{ع} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبفك المحدد نحصل على :

$$-س^2_{ص} د_{ع ع} + ٢ س_{ع} س_{ص} د_{ص ع} - د_{ص ص} س^2_{ع} > 0$$

وبالقسمة على س٢ ص مع استخدام الشرط الأول نجد أن :

$$-د_{ع ع} + 2 \frac{د س}{د ص} د_{ص ع} - د_{ص ص} \frac{د^2 ع}{د^2 ص} > 0$$

وبالضرب في $د^{2}_{ص}$ وتغيير الإشارة نحصل على :

$$ـ_{ع ع}\ د^{2}_{ص} - 2\ د_{س}\ د_{ص}\ د_{ص ع} - ل_{ص ص}\ د^{2}_{ع} < 0$$

وبعبارة أخرى أن الشرط الثاني لتحديد نقطة بلوغ مستهلك أقصى إشباع في ظل قيد ميزانية معين يتطلب أن يكون منحنى السواء محدب من ناحية نقطة الأصل . فتوازن المستهلك يتحقق عند نقطة تماس خط الميزانية لأحد منحنيات السواء (الشرط اللازم للتوازن) ، تمثل نقطة التماس هذه أقصى إشباع يمكن تحقيقه في ظل الميزانية المتاحة إذا كانت منحنيات السواء محدبة من ناحية نقطة الأصل (الشرط الكافي للتوازن) .

مثال : حدد كميات السلعتين ص ، ع اللتان تحققان أقصى إشباع لمستهلك يريد إنفاق "100" جنيه علماً بأن سعر السلعة الأولى "2" وسعر السلعة الثانية "1" وأن دالة منفعته هي :

$$م\ ك = 5\ ص\ ع$$

الحـــل :

يمكن كتابة قيد الميزانية بالشكل التالي :

$$100 = 2\ ص + ع$$

وتصبح دالة الهدف

$$ف = 5\ ص\ ع + ل\ (100 - 2\ ص - ع)$$

وبحساب المشتقات الجزئية الأولى ومساواتها بالصفر .

$$ف_{ص} = 5\ ع - 2\ ل \qquad = 0$$

$$ف_{ع} = 5\ ص - ل \qquad = 0$$

ف ر = 100 – ٢ ص – ع

وبحل هذه المعادلات آنياً نجد أن :

ص = 25 ، ع = 50

وللتحقق من أننا عند نقطة نهاية عظمى نحسب | هـ̄ |

$$|\bar{هـ}_٢| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

فالدالة تبلغ نقطة نهاية عظمى .

مثال (١) : إذا كانت دالة المنفعة لأحد المستهلكين للسعة (×) هـــي :

$$U_x = 48\ x - 2\ x^2$$

وكان سعر السلعة (×) – أي (P_x) – يساوي (4) جنيه فـــإذا كانـــت المنفعـــة الحدية للنقود تساوي (4) – فما هي الكمية التي يستهلكها المستهلك من السلعة (×) حتى يحصل على أكبر قد من الإشباع (أي حتى يتحقق توازن المستهلك) .

الحـــــل :

نساوي المنفعة الحدية لما قيمته جنيه من السلعة (×) $\left(\frac{M\ U_x}{P_x}\right)$

المنفعة الحدية للنقود

$$M\ U_x = \frac{dU_x}{d_x} = 48 - 4_x$$

تقسم المنفعة الحدية على سعر السلعة فنحصل على :

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{48 - 4x}{4} = 12 - x$$

تحقق المعادلة :

$$\frac{MU_x}{P_x} = \lambda$$

$$12 - x = 4$$

$$x = 8$$

أي يتحقق التوازن (يحصل على أكبر قدر من الإشباع) عنـــدما يســتهلك (8) وحدات من (x) .

مثال (٢) : إذا علمت أن دالة طلب المستهلك هي $Q = 10 - P$

أحسب فائض المستهلك عندما يكون $(P = 4)$ وعندما $(P = 5)$

الحـــــل :

أولاً : نحسب كمية التوازن عندما يكون السعر (4) وعندما يكون السعر (5) .

وذلك من معادلة الطلب : $P = 10 - Q$

إذاً عندما $P = 4$ $q_e = 6$

وعندما $P = 5$ $q_e = 5$

ثانياً : نحسب المساحة تحت منحنى الطلب بين كمية (O) و (q_e) .

المساحة تحت منحنى الطلب $= \int_0^{qe} (10 - Q)\, dQ$

$$= (10Q - 0.5Q^2)_0^{qe}$$
$$= 10\,qe - 0.5\,q_e^2$$

عندما يكون $q_c = 6, P = 4$

إذاً المساحة تحت منحنى الطلب = $42 = 10 \times 6 - 0.5 \times 36$

عندما يكون $q_c = 5, P = 5$

إذاً المساحة تحت منحنى الطلب - $37.5 = 10 \times 5 - 05 \times 5^2$

فائض المستهلك = المساحة تحت منحنى الطلب مطروحاً منها $P.Q_c^1$

عندما يكون السعر (٤)

فائض المستهلك = ٤٢ – ٤ × ٦ = ١٨

عندما يكون السعر (٥)

فائض المستهلك = ٣٧,٥ – ٥ × ٥ = ١٢,٥

مثال (٣): بفرض أن دالة المنفعة م = أ ب ، س١ = ٢ جنيه ، س٢ = ٥ جنيه

دخل المستهلك في هذه الفترة = ١٠٠ جنيه

يمكن كتابة معادلة النص كالآتـــي :

١٠٠ = ٢ أ + ٥ ب

إذا ١٠٠ – ٢ أ – ٥ ب = صفر

من هذه المعادلة

ب = ٢٠ – $\frac{\text{٢ أ}}{\text{٥}}$ بإحلال قيمة ب في دالة المنفعة (م = أب)

م = ٢٠ أ – $\frac{\text{٢ أ}^{٢}}{\text{٥}}$

بتفاضل م بالنسبة للسلعة ١

$\frac{\text{د م}}{\text{د}}$ = ٢٠ – $\frac{\text{٤ أ}}{\text{٥}}$

وبمساواة هذا التفاضل بالصفر نجد أن أ = ٢٥ وبالتعويض بهذه القيمة في معادلة الدخل نجد أن ب = ١٠ وعلى ذلك فإن هذه التوليفة تعظم إشباع المستهلك في حدود دخله .

معظمة الإشباع باستخدام معامل لاجرانج Lagrange Multiplies

بالإضافة إلى ما سبق فإنه يمكن اشتقاق دالة الطلب الفردية رياضيا باستخدام معامل لاجرانج ، فنفرض أن المطلب معظمة الإشباع في حدود دخل معين وأن دالة المنفعة

م = د (ك أ ، ك ب)

ومعادلة الدخل أو خط التوليفات الممكنة هي

د ه = س أ ك أ + س ب ك ب

ولمعظمة المنفعة أو الإشباع في حدود الدخل المحدود (د ه) وفقا لمعامل لاجرانج يتطلب تكوين دالة جديدة ترتبط بين دالة المنفعة ومعادلة الدخل عن طريق استخدام معامل لاجرائح وهذه الدالة الجديدة :

ه = م + ل د ٥ حيث ل تمثل معامل لاجرائح

ويمكن صياغة المشكلة الحالية في المعادلة التالية :

هـ = د (ك أ ، ك ب) + ل (د ه – س أ ك أ – س ب ك ب)

ولمعظمة المنفعة واستخراج دالتي الطلب الفردي لكل من السلعتين (أ ، ب) يلزم إيجاد التفاضل الأول لدالة هـ بالنسبة لك لمن ك أ ، ك ب ، ل ومساواة الناتج بالصفر وذلك كما في المعادلات التالية :

$$\frac{د هـ}{د ك_أ} = \frac{د م}{د ك_أ} - ل س_أ = ا - ل س_أ = صفر \quad (٢)$$

$$\frac{د هـ}{د ك_ب} = \frac{د م}{د ك_ب} - ل س_ب = م ح_ب - ل س_ب = صفر \quad (٣)$$

$$\frac{د هـ}{د ل} = د^{ه} - س_أ ك_أ - س_ب ك_ب = صفر \quad (٤)$$

وبقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (٣) ينتج أن :

$$\frac{د م}{د ك_١} \div \frac{د م}{د ك_ب} = \frac{س_أ}{س_ب}$$

$$إذا\ م ح ل = \frac{م ح_أ}{م ح_ب} = \frac{س_أ}{س_ب}$$

وبحل المعادلات الثلاث السابقة

$$ك_أ = \frac{د ه}{٢ س_أ} \quad ، \quad ك_ب = \frac{د ه}{٢ س_ب}$$

مثال (٤) : إذا كانت دالة المنفعة الخاصة بمستهلك ما للسلعتين (Y) و (X)

هي $U = 15\,x + 10\,Y - 2\,x^2 - Y^2$

فاستنتج دالة طلب المستهلك الخاصة بكل من السلعة x والسلعة (Y) ، وذلك إذا علمت أن $(P_x = 3)$ و $(P_y = 2)$ والدخل النقدي (1) المخصص إنفاقه على السلعتين يساوي (4) .

الحـــــل :

دالة المنفعة هـــي :

$$U = 15x + 10Y - 2x^2 - Y^2$$
$$P_x X + P_y Y = 1$$
$$3x + 2Y = 4$$

وباتباع طريقة لاجرانج فإن الدالة التي يراد تعظيمها هي :

$$L = 15x + 10y - 2x^2 - Y^2 - \lambda(3x + 2y - 4)$$
$$L_x = 15 - 4x - 3\lambda = 0$$
$$L_y = 10 - 2y - 2\lambda = 0$$
$$L\lambda = -3x - 2Y + 4 = 0$$

من المعادلات السابقة

$$15 - 4X = 3\lambda$$
$$15 - 3y = 3\lambda$$

$$4x = 3Y$$

$$X = \frac{3}{4} Y$$

$$Y = \frac{4}{3} X$$

وبالتعويض في معادلة قيد الدخل

$$3 \quad (\frac{3}{4} Y) + 2 Y = 4$$

$$\frac{9}{4} Y + 2 Y = 4$$

$$Y = \frac{16}{17}$$

$$Y = \frac{3}{4} x \frac{16}{17}$$

$$= \frac{12}{17}$$

وحتى تكون قيمتي $x = \frac{12}{14}$ و $Y = \frac{12}{17}$

هي التي تعظم المنفعة فيقتضي الأمر التحقق من الشرط اللازم :

$$2 f_{xy} P_x P_y > f_{xx} (p_y)2 + f_{yy} (P_x)^2$$

$$2x0 (3) (2) > - 4 (2) 2 + (-2) (3)2$$

$$O > - 16 + (-18)$$

$$O > - 34$$

وبالتالي فإن الشرط الثاني محقق

ويمكن الحصول على دالة الطلب على السلعة (X) بالتعويض في معادلة قيد الدخل .

$$P_x\, x + P_y \; \frac{4}{3} x = 1$$

$$X\,(P_x + \frac{4}{3} P_y) = 1$$

وهي دالة طلب السلعة (X)

$$X = \frac{1}{P_x + \frac{4}{3} P_y}$$

بالتعويض

$$x = \frac{4}{3 + \frac{4}{3} \times 2} = \frac{12}{17}$$

$$P_x \; (\frac{4}{3} Y) + p_Y Y = 1$$

$$Y \; (\frac{4}{3} P_x + P_y) = 1$$

وهي دالة طلب السلعة (Y)

$$Y = \frac{1}{\frac{3}{4} P_x + P_y}$$

بالتعويض

$$Y = \frac{4}{\frac{3}{4} \times (3) + 2} = \frac{16}{17}$$

الفصل السابع

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

أولاً : مفاهيم عامة

في كثير من العمليات الرياضية نلاحظ أن كل عملية لها عملية عكسية تقابلها فالطرح هو العملية العكسية للجمع والقسمة هي العملية العكسية للضرب وعلى نفس النمط أن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل وقد لاحظنا أن عملية التفاضل تهدف إلى إيجاد معدل تغيز ص بالنسبة إلى س في دالة معينة وفي كثير من الدراسات الرياضية يكون معلوماً لدينا معدل التغير في دالة معينة ونطلب معرفة الدالة التي تتغير بهذا المعدل . وبذلك يكون معلوم لدينا مشتقة الدالة وباستخدام عملية التكامل يمكن إيجاد الدالة نفسها التي لها هذه المشتقة ويرمز إلى تكامل الدالة د (س) بالنسبة إلى س بالرمز .

د (س) د س وتقرأ تكامل د (س) بالنسبة إلى س

وتجري عملية التكامل وفقاً لبعض القواعد التالية :

(١) $س^{ن}$ د س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ث مقدار ثابت .

(٢) $(أ س + ب)^{ن}$ د س حيث أ ، ب ثوابت

$$= \frac{١}{أ} \times \frac{(أ\ س + ب)^{ن+١}}{(ن + ١)} + ث$$

(٣) تكامل حاصل ضرب دالتين = الأولى × تكامل الثانية

= تكامل الثانية × تفاضل الأولى

مثال (١) : $س^{٥}$ د س = $\frac{١}{٦}$ $س^{٦}$ + ث

مثال (٢) : ٣ $س^{٢}$ د س = $\frac{٣\ س^{٢}}{١}$ + ث = $س^{٣}$ + ث

مثال (٣) : أوجـــد $(٢س - ٣)^{٤}$ د س

الحـــــل : التكامل = $\frac{١}{٢} \times \frac{(٢\ س - ٣)^{٥}}{٥}$ + ث

= $\frac{١}{١٠}$ $(٢\ س - ٣)^{٥}$ + ث

ثانيا : كيفية إيجاد الثابت (ث)

مثال (٤) : إذا علمت أن ص = ١٩ عندما س = ٢ ، ص = د (س) .

أوجـــــد ٣ $س^{٢}$ د (س)

ومنها أوجد الدالة ص = د (س)

- الحـــــل : التكامل = $\frac{٣ س^٢}{٣}$ + ث

إذاً ص = س ^{٢} + ث

ص = ١٩ عندما س = ٢

١٩ = ٨ + ث إذاً ث = ١١

إذاً ص = س ^{٣} + ١١

مثال (٥) : إذا كانت $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س^٢ – ١٠ – ٧

وكانت ص = ٢٤ عندما س = ٢ أوجد مقدار ص بدلالة س

الحــل :

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س^٢ – ١٠ س – ٧

د ص = (٣ س^٢ – ١٠ س – ٧) د س

بإجراء عملية التكامل للطرفين

∫ د ص = ∫ (٣ س٢ – ١٠ س – ٧) دس

ص = س^٣ – ٥ س^٢ – ٧ س + ث

ص = – ٢٤ عندما س = ٢

– ٢٤ = ٨ – ٢٠ – ١٤ + ث

إذا ث = − ٢٤ + ٢٦ = ٢   إذاً ص = س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٧ س +٢

مثال (٦) : أوجد الدالة التي يكون معدل تغيرها عند أي لحظة هو (٦ س٢ − ٤ س + ٣) وقيمتها ١٠ عندما س = ١

الحـــل :

د ص / د س = ٦ س^{٢} − ٤ س + ٣

∫ د ص = ∫ (٦ س^{٢} − ٤ س + ٣) د س

ص = ٢ س − ٢ س٢ + ٣ س + ث

ص = ١٠   عندما س = ١

١٠ = ٢ − ٢ +٣ ث

إذا ث = ٧   إذاً ص = ٢ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٣ س + ٧

ثالثاً : التكامل المحـــدد

يستخدم أسلوب التكامل في حساب المساحات مثلاً المســاحة الواقعــة تحت منحني معين ويتم ذلك بوضع حدود على عملية حساب التكامل فالقواعــد السابقة كلها تعطي دالة عامة فعلى سبيل المثال :

∫ (د ص / د س) ء س = د (س) + ث

فإذا اخترنا قيمتين مثل أ ، ب ثم حسبنا قيمة الدالة عندهما فإننا نحصل على ما يسمى بالتكامل المحدد . فالتكامل المحدد إذاً يحسب عن طريق التعويض في التكامل غير المحدد بقيمتين إحداهما تمثل الحد الأعلى والأخرى تمثل الحد الأدنى لعملية حساب التكامل . ويعبر عن ذلك رياضياً بعدة رموز مثل $\int_{أ}^{ب}$ أو باستخدام $\int_{أ}^{ب}$ أو بالرمز $\Big]_{أ}^{ب}$ وكلها عبارة عن تحديد للحد الأقصى للدالة الناتجة عن التكامل عند ب ، وللحد الأدنى للدالة الناتجة عن أ . بناء على ذلك فإنه يمكننا الحصول على التكامل المحدد للدالة بالتعويض فيها بالقيمة القصوى (ب) ثم نطرح قيمتها عند الحد الأدنى ، أي أن التكامل المحدد هو .

$$\int_{أ}^{ب} \frac{ءص}{ءس} ءس = \Big(د\,(س) \Big)_{أ}^{ب}$$

$$= د\,(ب) - د\,(أ)$$

مثال : أحسب التكامل

$$\int_{1}^{4} 2س^{2}\, ءس$$

$$= \frac{2}{3}\, س^{3} \Big|_{1}^{4}$$

$$= \frac{2}{3}\,(64) - \frac{2}{3}\,(١)$$

$$= 42$$

رابعاً : تطبيقات اقتصاديـــــــة

١ – فائض المستهلك

من المعروف أن التمييز في الأسعار يتم من خـــلال قيـــام المحتكـــر يتقاضى سعرين لنفس السلعة وذلك عندما يتمكن من تقسيم سوق الســـلعة إلـــى جزئين منفصلين . وبإتباع نفس القاعدة يمكننا توضيح الحالة التي يتقاضى فيها المحتكر عدة أسعار بناء على تقسيم السوق إلى عدة أجزاء ، ونستطيع تصـــور حالة متطرفة يتقاضى فيها المحتكر سعراً مختلفاً من كل فرد يرغب في شــــراء سلعة (وهي حالة التمييز الكامل في (الأسعار) . يتقاضى المحتكـــر فـــي هـــذه الحالة أقصى سعر يكون المستهلك على استعداد لدفعه مقابل السلعة . ويكـــون الإيراد الكلي للمحتكر هو المساحة الواقعة تحت منحنى الطلب . ورغم نـــدرة وجود التمييز الكامل في الأسعار إلا أنها تساعدنا على تصور أقصـــى ســـعر يكون المستهلك على استعداد لدفعه للحصول على كمية معينة من السلعة (ك*) . ويمكن حساب المساحة الواقعة تحت منحنى الطلب بحساب التكامل التالي :

أ ك د (ك) ء ك
(الحد السفلي: د)

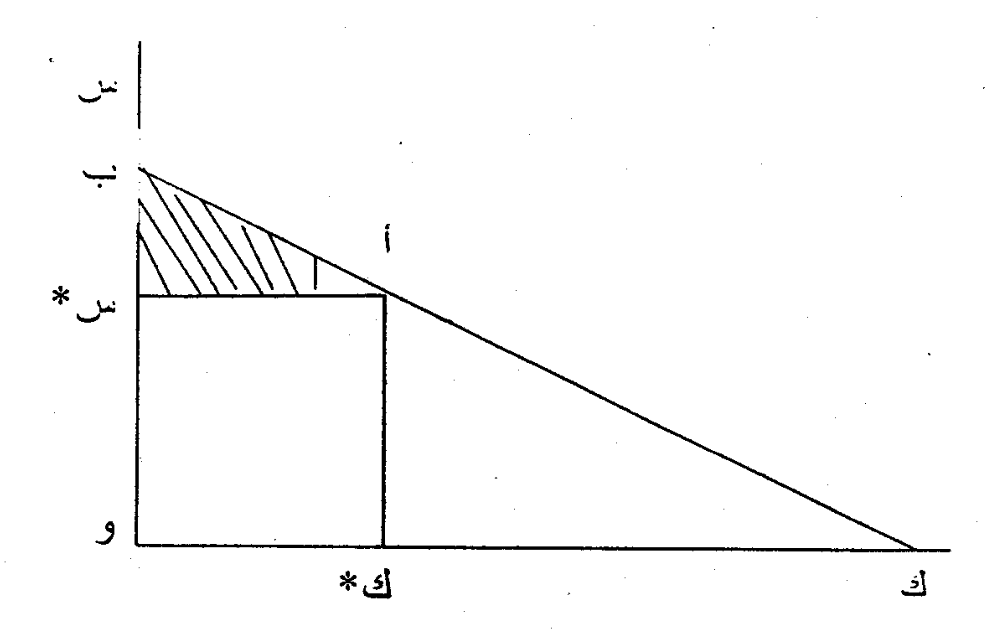
حيث د (ك) دالة الطلب على السلعة ، ء ك التغير في كمية السلعة غير أنه طبقاً للسوق فإن الإيرادات الكلية التي سوف تتحقق عند الســـعر التـــوازني هي:

أ ك* س ء ل
(الحد السفلي: د)

وتساوي حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية التوازنية أي (س*ك) ويعرف الفارق بين أقصى سعر يكون المستهلك على استعداد لدفعه وبين ما يدفعه فعلاً بفائض المستهلك ، أي أن فائض المستهلك هو الفارق بين المقدارين السابقين .

$$\text{فائض المستهلك} = \int_{\text{٥}}^{\text{ك}^*} \text{د (ك) ء ل} - \text{س}^* \text{ك}^*$$

ويمكننا توضيح فائض المستهلك باستخدام الشكل التالي :



فائض المستهلك

لحساب فائض المستهلك عند الكمية التوازنية ك * فإننا نلاحظ أن المستهلك كان على استعداد لدفع المقدار (و ك أ ب) في حين أنه دفع فعلاً المقدار (أس* ك*و) أي أن الفارق هو أ ب س* المساحة المظللة بالشكل السابق . ويمكن حساب تلك المساحة بأخذ الفارق بين المساحة الكلية الواقعة

تحت منحنى الطلب عند الكمية ك* وبين الإيرادات الكليــة المحققــة فعــلا .
ونوضح ذلك باستخدام المثال التالي :

مثال (١) : أحسب فائض المستهلك عند الكمية التوازنية في نموذج السوق .

$$\text{س} = 15 - \text{ك}^2$$

$$\text{س} = 3 + \text{ك}^2$$

الحــــل : لتحديد السعر والكمية التوازنية نعوض في شرط التوازن

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ك}_{\text{ع}}$$

$$15 - \text{ك}^2 = 3 + \text{ك}^2$$

$$\overline{\text{ك}} = 3$$

$$\overline{\text{س}} = 6$$

ولحساب فائض المستهلك نعوض في :

$$\int_{\text{٠}}^{3} (15 - \text{ك}^2)\ \text{ء ك} - \text{س ك}$$

$$= \left(15\ \text{ك} - \frac{2}{3}\ \text{ك}^3\right)_{\text{٠}}^{3} - 6\text{x}3$$

$$= 9$$

ويمكننا حساب فائض المستهلك وذلك بحساب التكامل بالنسبة للسعر وسوف يساوي .

$$\int_{س^*}^{س_٠} د(س)\ ء س$$

حيث د (س) هي دالة الطلب ، ء س التغير في السعر ، س* السعر التوازني ، س ₀ السعر الذي يوضح انخفاض الكمية المطلوبة إلى الصفر ويتحدد عند نقطة تقاطع دالة الطلب مع محور الأسعار (الرأسي) .

مثال (٢) : أحسب فائض المستهلك باستخدام التكامل بالنسبة للسعر في النموذج التالي :

$$س = 20 - 2 ك$$

وذلك عند كل من $س = 4$ ، $س = 8$

الحـــل :

نعبر عن دالة الطلب بالصورة

$$ك = 10 - \frac{1}{2} س$$

فإذا كانت ك = 0 فإن س سوف تبلغ

$$س_٠ = 20$$

ويكون فائض المستهلك عند س = 4

$$\int_{8}^{20} \left(10 - \frac{1}{2}\,\text{س}\right) \text{ء س}$$

$$\left(10\,\text{س} - \frac{1}{4}\,\text{س}^{2}\right)\Big|_{8}^{20}$$

$$= 100 - 36$$
$$= 64$$

أما عند السعر س = 8 فإن فائض المستهلك سيكون

$$\int_{4}^{20} \left(10 - \frac{1}{2}\,\text{س}\right) \text{ء س}$$

$$\left(10\,\text{س} - \frac{1}{4}\,\text{س}^{2}\right)\Big|_{4}^{20}$$

$$= 100 - 64$$
$$= 36$$

٢ – فائض المنتج

يعرف فائض المنتج بأنه الفارق بين ما يحصل عليه المنتج من بيعه كمية من السلعة وبين المبلغ اللازم لحفزه على إنتاج تلك الكمية . وحيث أن

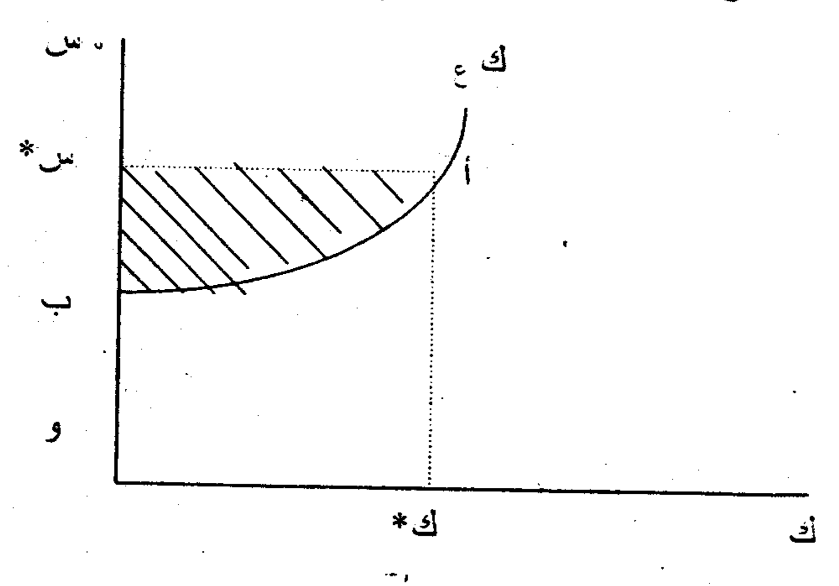
المقدار الأخير هو المساحة الواقعة تحت منحنى العرض وأنه يمكننا حساب تلك المساحة باستخدام التكامل وتساوي

$$\int_{ه}^{ك^*} د(ك)\, ء ك$$

حيث د (ك) هي دالة العرض ، ء ك هي التغير في الكمية المعروضة نلاحظ أن المبلغ الفعلي الذي يحصل عليه المنتج مقابل بيعه الكميـــة ك* هــو حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية أي أنه يساوي س* ك* وبالتالي فإنه فائض المنتج هو الفارق بين المبلغين السابقين ، فهو :

$$س^* ك^* - \int_{ه}^{ك^*} د(ك)\, ء ك$$

ويمكن توضيح ذلك بيانياً بالشكل التالي :



فائض المنتج

ويتضح من الشكل السابق أن ما سيحصل عليه المنتج هو مساحة المستطيل (أ س* ك*و) . بينما يكفي المنتج الحصول على (أ ب ك*و) لعرض نفس الكمية . بناء على ذلك فإن فائض المنتج الفارق بين المقدارين هو الجزاء المظلل بالشكل .

كما يمكننا حساب فائض المنتج باستخدام التكامل بالنسبة للسعر وسوف نجد أنه يساوي :

$$\int_{س_ه}^{س^*} د(س)\ ء س$$

حيث س* هو السعر التوازني ، س ه السعر الذي يوضح انخفاض الكمية المعروضة إلى الصفر أي أن نقطة تقاطع منحنى العرض مع المحور الرأسي .

مثال : أحسب فائض المنتج لدالة العرض

$$س = -2 + 3\,ك$$

علماً بأن السعر التوازني والكمية التوازنية في السوق هما على ترتيب 15 ، 3

الحـــل : يمكننا حساب المنطقة الواقعة تحت منحنى العرض

$$\int_{ه}^{5} (-2 + 3\,ك)\ ء ك$$

$$= \left(2ك + \frac{3}{2}ك^{2}\right)_{0}^{5}$$

$$= 27.5$$

وحيث أن الإيراد الكلي للمنتج هــو :

$$15 \times 3 = 45$$

فإن فائض المنتج سوف يبلغ

$$45 - 27.5 = 27.5$$

٣ – المنحنيات الكلية والحدية

أوضحنا أن التحليل الحدي هو حساب المشتقة الأولى للدالة الكلية ولقد أوضحنا أنه إذا كانت الدالة الكلية تشمل متغير واحد فإن الدالة الحدية لها هـــي المشتقة الأولى ، أما إذا اشتملت الدالة على عدد من المتغيرات المســتقلة فــإن المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة هي الدالــة الحديــة ، والآن يمكننا باستخدام التكامل الوصول إلى الدالة الكلية من الدالة الحدية . فعلى سبيل المثال فإنه يمكننا تحديد دالة المنفعة الكلية (م ك) لمستهلك ما من خـــلال تكامل دالة المنفعة الحدية (م ح) أي أن

$$م_ك = \int (م\ ح)\ ء ك$$

أي أن المنفعة الكلية المحققة هي مجموع المنافع الحدية لمختلف الوحدات المستخدمة من السلعة أي المساحة الواقعة تحت منحنى المنفعة الحدية . وهذه المساحة يمكن حسابها باستخدام التكامل .

وبالتالي حساب الإيراد الكلي بأخذ تكامل دالة الإيراد الحدى بالنسبة للكميات أي أن :

أ ك = ∫ (أ ح) ء ك

مثـــال : إذا علمت أن دالة الإيراد الحدى لمنشأة ما هي

أ ح = 25 – ك

فأحسب دالة الإيراد الكلي ومقدار تغيره عند تغير الكمية من "5" إلى "15" وحـــدات .

أ ك = ∫ (أ ح) ء ك

= ∫ (25 – ك) ء ك

= ∫ 25 ك – $\frac{1}{2}$ ك ^{2}

وسوف يتغير الإيراد الكلي عند تغير الكمية من 5 إلى 10 بالمقدار

$$\Delta \text{ أ ك } = \left(25 \text{ ك} - \frac{1}{2} \text{ ك}^2 \right)_5^{10}$$

$$= 87.5$$

مثـــــال : إذا علمت أن التكاليف الثابتة لمنشأة ما هى (25) وحدة وأن دالة تكاليفها الحدية هي :

$$\text{ت ح} = 20 - 26 \text{ ك} + \text{ك}^2$$

$$\text{ت ك} = \int (\text{ت ح}) \text{ ء ك}$$

$$= \int (20 - 26 \text{ ك} + \text{ك}^2) \text{ ء ك}$$

$$= 20 \text{ ك} - 26 \text{ ك}^2 + \frac{1}{3} \text{ ك}^3 + \text{ث ك}$$

وحيث أن التكاليف الثابتة هي 25 ، فإن دالة التكاليف الكلية للمنشأة هي :

$$\text{ت ك} = 20 \text{ ك}^2 - 26 \text{ ك}^2 + \frac{1}{3} \text{ ك}^3 + 25$$

ويمكن باستخدام التحليل السابق حساب حجم الأرباح "ر" من دوال التكاليف الحدية والإيراد الحدى .

مثال : إذا علمت أن دوال الإيراد الحدي والتكاليف الحدية لمنشأة ما كانت

$$\text{أ ح} = 26\,\text{ك} - 9\,\text{ك}^2$$

$$\text{ت ح} = 2 + 6\,\text{ك}$$

وأن التكاليف الثابتة للمنشأة هي "14" فأحسب حجم الأرباح عند م الإنتاج التوازني .

الحـــــل : حيث أن

$$\text{ر} = \int (\text{أ ح} - \text{ت ح})\ \text{ء ك}$$

فإننا نحتاج إلى حساب الكمية التوازنية لحساب التكامل السابق بين الكمية صفر والكمية التوازنية . ولتحديد تلك الكمية نحسب

$$26 - 9\,\text{ك}^2 = 2 + 6\,\text{ك}$$

إذا ك = -2 ، ك = $\frac{4}{3}$

أي أن الكمية التوازنية هـــــي : $\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\text{ر} = \int_{0}^{\frac{3}{4}} (26 - 9\,\text{ك})^2\ \text{ء ك} - (2 + 6\,\text{ك})\ \text{ء ك}^2$$

$$= \int_{0}^{\frac{3}{4}} 26\,\text{ك} - 3\,\text{ك}^3 - \Big|_{0}^{\frac{3}{4}}\ 2\,\text{ك} + 3\,\text{ك}^2$$

$$= 19.55$$

مثال : إذا أعطيت دوال الإنتاج الآتية وضح فيما إذا كان عائد الحجم Return to Scale يتزايد أو يتناقص أو ثابت Q = الإنتاج و L = العمل و K = رأس المال :

أ - $Q = 2L + 4k$

ب - $Q = A L^a K^b$

ج - $Q = 2L^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{3}}$

د - $Q = 4 L^{0.75} K^{0.5}$

هـ - $Q = 2L^2 + L k + K^2$

الحـــــل :

لمعرفة فيما إذا كانت دالة الإنتاج تخضع لتزايد أو تناقص أو ثبات عائد الحجم فإننا نقوم بضرب جميع عوامل الإنتاج في الدالة في (λ)

أ

$$Q = 2l + 4K$$

$$Q1 = 2\lambda l + 4\lambda k$$

$$= \lambda(2L + 4K)$$

$$= \lambda Q$$

ففي هذه الحالة دالة الإنتاج تكون خاضعة لثبات عائد الحجم ، ذلك لأننا ضربنا عوامل الإنتاج في (λ) فنتجت كمية منتجة تساوي الكمية السابقة (Q) مضروبة في (λ) .

$$Q = AL^a K^b$$

$$Q_1 = A(\lambda L)^a (\lambda K)^b = \lambda^{a+b} = \lambda^{a+b} Q$$

وعليه : فإن عائد الحجم يكون ثابتاً عندما يكون $(a + b = 1)$ ، كما هو الحال في دالة Cobb-Douglas أما إذا كانت $(a + B > 1)$ فيكون هناك تزايد في عائد الحجم ، وعندما يكون $(a + b > 1)$ يكون هناك تناقص في عائد الحجم .

ج - عندما تكون : $Q = 2 L^{\frac{1}{2}} \quad k^{\frac{1}{2}}$ فإن $a + b = \frac{5}{6} <$

وعلية فإن الدالة تكون خاضعة لتناقص عائد الحجم .

د - عندما تكون $Q = 4 L^{0.75} \ K^{0.5}$

$1 > 1.25 = a + b$

وعليه فإن الدالة تكون خاضعة لتزايد عائد الحجم .

هـ - $Q = 2 L2 + L K + K2$

$2_1 = 2 (\lambda L)^2 + (\lambda L)(\lambda K) + (\lambda K)^2 = (2 L^2 + L K + K^2) \lambda^2 Q$

وبالتالي فإن عائد الحجم يتزايد .

المراجـــــع

أولاً : المراجع العربية

١- فتحي صالح أبو سدره ، مقدمة في الاقتصـــاد الرياضـــي ، دار الكتـــب الوطنية ، بنغازي ، ١٩٩٥ .

٢- محمد لطفي فرحات ، مبادئ الاقتصاد القياسي ، الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع والإعلان ، ليبيا ، ١٩٩٦ .

٣- محمد فتحي محمد علي ، فريد الحسيني عبدالبديع ، مقدمـــة الاقتصـــاد الرياضي ، مكتبة عين شمس ١٩٦٩ .

٤- سامي خليل ، نظرية اقتصادية جزئية ، مكتبة النهضة العربية ، مؤسسة على الصباح ، الكويت ١٩٩٣ .

٥- أحمد عباده سرحان ، مقدمة الإحصـــاء الرياضـــي ، دار المعـــارف ، ١٩٧١.

٦- أحمد عباده سرحان ، طرق التحصيل الإحصائي ، دار الكتب الجامعيـــة ١٩٧٦ .

٧- سعد الشريف ، الإقتصاد القياسي ، جامعة ٦ أكتوبر ، ٢٠٠٤ .

٨- فارس عياد شاكر ، الإحصاء التحليلي ، القاهرة ، ٢٠٠٢ .

٩- أحمد حسن العطار ، مبادئ الإحصاء التحليلي ، القاهرة ، ٢٠٠٣ .

١٠- سمير عبدالمجيد ، مبادئ الرياضيات ، جامعة ٦ أكتوبر ، ٢٠٠٤ .

١١- محمد توفيق المنصوري ، مصطفى عبدالغني أحمد ، الرياضة والتأمين ، مكتبة عين شمس ٢٠٠٣ .

١٢- صلاح الدين صدقي ، مبادئ النظريـــة الإحصـــائية وتطبيقاتهـــا فـــي المشروعات التجارية الصناعية ، الطبعة العاشرة ، مكتبة عـــين شـــمس ١٩٩٩.

١٣- جلال الصياد وآخرون ، مقدمة في الطرق الإحصائية وبحوث العمليات ، الفاروق الحديث للطباعة والنشر ، ١٩٨٧ .

ثانياً : المراجع بالإنجليزية

1- Edward J. Kane , Economic Statistics and Econometrics : An Introduction to Quantitatie. Economic, New York. Harper and Row, Publishers , 1968.
2- Durbin and G. S Watson, Testing for Serial Correlatoin in least squares Regression, Biometrika . Vol (38) 1951.
3- Alchian, Armen, The Meaning of Utility Measurement. American Economic Review 43 (1953).
4- Cheist, C., Economic Models and Methods, Wiley, 1966.
5- Goldberger, A.S. Econometric Theory, Wiley, 1964.
6- Inriligator, M.D., Econometric Models Techniques and Appli-cations, North-Holland, 1978.
7- Johnston, J.Econometric Methods, Mc Graw-Hill, 1972
8- Kelejian, H. And Oates, W., Introduction to Econometrics. Harper International Edition, London, 1974.
9- Kmenta, J., Elements of Econometrics,Macmillan, New York, 1971
10- Koutosoyiannis, A., Theory of Econometrics, Macmillan. London, 1979.
11- Malinvoud, E., Statistical Methods in Econometrics. North-Holland, 1966..

12- Theil. H., Principles of Econometrics, North-Holland, 1972.

13- Wonnacott. R, J., and Wonnacott. T.H. Econometrics, Wiley, 1970.

14- Baumel, W, Economic Theory and Operations analysis. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice – Hall, Inc, 1965.

15- Klein, L., Introduction to Econometrics, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.